UNIVERSIDADE DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA NO DIA-A-DIA

Oksana Verbytska

DISSERTAÇÃO

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA OS PROFESSORES

Dissertação elaborada sob orientação de:

Professora Doutora Suzana Metello de Nápoles, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

LISBOA

2014

Agradecimentos

A Deus pelo Dom da vida, por tudo que tenho e sou, por ter me permitido a chegar a onde cheguei.

Aos professores pela eficiência, em especial à minha orientadora Suzana Metello de Nápoles, fazendo-me acreditar no meu potencial.

Aos meus amigos e colegas do mestrado pela compreensão, carinho, incentivo e paciência.

Aos meus alunos pelo interesse e empenho nos trabalhos que realizamos.

Resumo

Pretende-se neste trabalho evidenciar a presença da Matemática no dia-a-dia e mostrar a sua importância para entender o mundo que nós rodeia. Visa tirar partido desta ciência em situações quotidianas e estudar a inserção das mesmas nos currículos do ensino básico e do ensino secundário. Para o efeito, identificam-se temas em setores diversificados e propõem-se atividades suscetiveis de promover aplicações num contexto real de conceitos matemáticos estudados em diferentes níveis de ensino.

Em alguns casos estas atividades ultrapassam o contexto prático de aplicação e destinam-se a promover a demonstração matemática.

ABSTRACT

It is intended in this work to emphasize the presence of mathematics in day-a-day and show its importance for understanding the world around us. It aims to take advantage of this science in everyday situations and study their insertion in the curricula of primary and secondary education. To this end, we identify issues in diversified sectors and we propose activities that can promote applications in a real context of mathematical concepts studied at different levels of education.

In some cases these activities go beyond the context of practical applications and are designed to promote mathematical demonstration.

Índice

Introdução

"A Matemática é indispensável a uma compreensão adequada de grande parte dos fenómenos do mundo que nós rodeia, isto é, a uma modelação dos sistemas naturais que permita prever o seu comportamento e evolução. Em particular, o domínio de certos instrumentos matemáticos revela-se essencial ao estudo de fenómenos que constituem objeto de atenção em outras disciplinas do currículo do Ensino Básico (Física, Química, Ciências da Terra e da Vida, Ciências Naturais, Geografia…) "

Programa de Matemática para o Ensino Básico, 2013

"Os instrumentos matemáticos são indispensáveis à concretização de modelos que permitem descrever, interpretar e prever a evolução de um grande número de sistemas reais cujo estudo se pode inserir nas mais diversas áreas do conhecimento. De um ponto de vista histórico é possível afirmar que alguns conceitos centrais da Matemática foram desenvolvidos com o propósito de serem utilizados no estudo de certos fenómenos naturais. O programa dá especial relevância a diversas aplicações da Matemática, prescrevendo, por exemplo, explicitamente, a aplicação do cálculo diferencial à cinemática de ponto ou das progressões geométricas ao cálculo de juros, o que permite em particular obter uma interpretação concreta do número de Neper."

Programa de Matemática A – Ensino Secundário, 2014

Estas preocupações, já salientadas em programas anteriores, estão presentes nos currículos da generalidade dos países.

Pretende-se neste trabalho evidenciar a presença da Matemática no dia-a-dia e mostrar a sua importância para entender o mundo que nos rodeia. Visa tirar partido desta ciência em situações cotidianas e estudar a sua inserção das mesmas nos currículos do ensino básico e secundário. Para o efeito, identificam-se temas em setores diversificados e propõem-se atividades suscetíveis de promover aplicações, num contexto real, de conceitos matemáticos estudados em diferentes níveis de ensino.

Em alguns casos estas atividades ultrapassam o contexto da aplicação e destinam-se a promover a demonstração matemática.

Além de propostas originais elaboradas no decurso da preparação deste trabalho, foi feita uma recolha e adaptação de atividades presentes em textos e "sites" referenciados na bibliografia.

1. A matemática dos calendários

A história dos calendários proporciona uma ligação entre a Astronomia e a Matemática que pode ser explorada desde o ensino básico.

Num calendário, os anos e os meses são geralmente, mas não necessariamente, sincronizados com os ciclos do sol ou da lua.

Segundo a lenda, o primeiro calendário romano remonta à fundação de Roma (753 a.C.). Neste calendário, que não tem base astronómica, o ano tinha 304 dias distribuídos por 10 meses. Este calendário mudou a sua forma diversas vezes e foi substituído pelo calendário juliano, um calendário solar adotado por Júlio César em 46 a.C..

No calendário juliano, de quatro em quatro anos havia sempre um ano bissexto: em consequência, com passar dos seculos, os erros foram-se acumulando. Por esse motivo, em 1582 o Papa Gregório XIII ordenou a eliminação de dez dias no calendário. Ele convidou uma equipe de matemáticos e astrónomos para criar um calendário que se adequasse melhor a quantidade de tempo que nosso planeta leva para dar uma volta completa em torno do Sol. A Terra não demora 365 dias exatos a efetuar uma volta em torno do Sol, mas pouco menos de 365 dias e 6 horas. O valor considerado para o novo calendário foi 365,2425 dias, que são 365 dias 49 minutos e 12 segundos.

Como $0,2425 = \frac{2425}{10000} = \frac{97}{400}$, em 400 anos sobram 97. Se é necessário ter 97 dias em 400 anos é preferível distribui-los o mais uniformemente possível.

Como 4×6 horas é um dia, de quatro em quatro anos o ano tem de ser bissexto, mas, como o período de rotação da Terra em torno do Sol é ligeiramente inferior a 365 dias e 6 horas, de 100 em 100 anos os erros acumulados totalizam um dia, que tem de ser retirado. Ainda outros acertos têm de ser efetuados, com períodos da ordem das centenas e dos milhares de anos.

Depois de muitas propostas apresentadas, utilizando uma aplicação da divisibilidade, foi adotado o seguinte procedimento com o ano bissexto de 366 dias e ano comum de 365 dias: anos que não são múltiplos de 4 são comuns; anos múltiplos de 100, que não são múltiplos de 400 são comuns; os restantes são bissextos.

Por exemplo:

1987: não é bissexto porque é impar (logo não é múltiplo de 4);

1658: não é bissexto porque não é múltiplo de 4;

1928: é bissexto porque é múltiplo de 4 não é múltiplo de 100;

2100: não é bissexto porque não é múltiplo de 400;

2800: bissexto porque é múltiplo de 400.

Em 24 de Fevereiro de 1582, o Papa Gregório XIII adotou este calendário, que foi denominado calendário gregoriano, em substituição do calendário juliano.

Neste contexto podemos propor aos alunos do ensino básico (5º ano) a determinação do número de anos bissextos a partir de uma certa data, o dia da semana em que nasceram, ou o dia da semana em que teve lugar um acontecimento histórico. As propostas seguintes permitem explorar neste contexto a divisão inteira e os conceitos de múltiplo e divisor.

— Quantos anos bissextos ocorreram desde 1915?

O último ano bissexto anterior a 2014 foi 2012 e o primeiro ano bissexto depois de 1915 foi 1916. Logo a diferença entre essas duas datas é de 96 anos. Dividindo o resultado da diferença por 4 e somando uma unidade ao quociente obtém-se 96:4= 24 e 24+1=25, pelo que ocorreram 25 anos bissextos desde 1915.

Este processo resume-se a contar os anos que são múltiplos de 4 no intervalo de tempo considerado. Há pois que ter cuidado quando nesse intervalo estão anos múltiplos de 4 que não bissextos (porque não são múltiplos de 400). Com efeito, de acordo com a regra anterior, o número de anos bissextos entre 1894 e 1910 seria (1908-1896): 4+1 =4. No entanto 1900 não é ano bissexto, pelo que o número de anos bissextos entre 1894 e 1910 é apenas 3.

— Em 21 de Julho de 1969 Neil Amstrong tornou-se o primeiro homem a pisar a lua. Que dia da semana seria?

Começamos por ver num calendário do ano atual em que dia da semana cai a data escolhida: em 2014, ao dia assinalado corresponde uma 2ª feira. Para contar o número de dias que decorreram entre os dias 21/7/1969 e 21/7/2014 basta ter em conta que um ano comum tem 365 dias e calcular o número de anos bissextos que decorreram entre 1969 e 2014.

Como 2014–1969 = 45, decorreram 45 anos.

Como o primeiro ano bissexto depois de 1969 é 1972 e o último antes de 2014 é 2012 e entre 1972 e 2012 não existem anos múltiplos de 100, o número de anos bissextos entre as duas datas é (2012–1972): 4 + 1= 11.

O número de dias entre as duas datas é $365 \times 45 + 11 = 16436$. Como uma semana tem 7 dias, o quociente da divisão inteira de 16436 por 7 dá o número inteiro de semanas decorrido e como não tem resto não sobra nenhum dia. Neste caso decorreram 2348 semanas e 0 dias. Então, o dia 21/7/1969 calhou a uma 2ª feira.

O procedimento anterior pode ser sistematizado num algoritmo que permite descobrir o dia da semana de qualquer data do calendário gregoriano, no passado ou futuro:

- Olhamos no calendário do ano atual em qual dia da semana cairá a data escolhida;

- Vemos qual é a diferença de anos entre o ano atual e o ano da data escolhida (chamaremos a esse número A);

- Contamos quantos anos bissextos aconteceram no intervalo em questão (chamaremos a este número B);

- Multiplicamos A por 365 e somamos B (chamaremos este número $D = 365 \times A+B$);

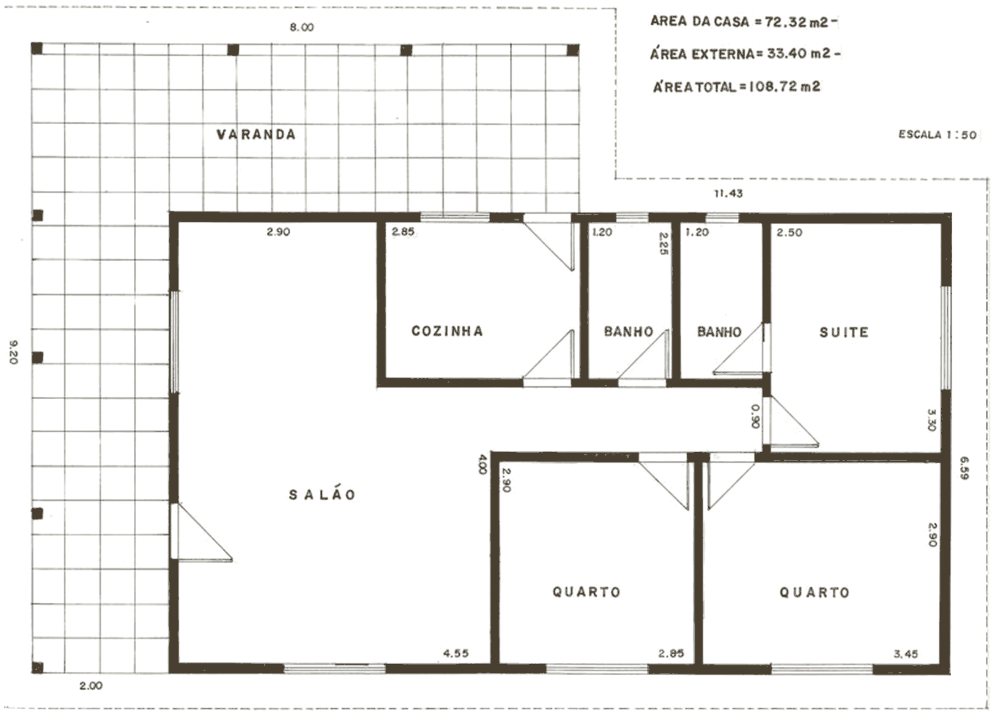
- Chamamos C ao resto da divisão inteira de D por 7;

- Caso a data seja no passado, teremos de retroceder na semana C dias; caso seja no futuro, então serão C dias para frente.

2. A Matemática na construção civil

A Matemática está presente no planeamento e execução de edifícios. Por exemplo, quando os arquitetos elaboram um projeto recorrem a representações em escala reduzida. São estes desenhos que permitem transmitir informação sobre a obra e estimar o seu custo. Utilizam conceitos, procedimentos e fatos geométricos como semelhança de figuras, relações de proporcionalidade e medidas.

A escala de um desenho é a razão constante entre as medidas nos desenhos e os comprimentos reais correspondentes, sempre medidos na mesma unidade. Se a escala indicada é de 1 : 50, isso quer dizer que cada medida no desenho é 50 vezes menor que a medida real. Sendo assim, cada centímetro medido no desenho representa 0,5 metros.



A indústria da construção procura padrões regulares para pavimentações do plano. É possível preencher um plano com polígonos regulares desde que tenham 3, 4 ou 6 lados.

Porquê só nestes casos?

A explicação geométrica é simples. O segredo está nos ângulos internos dos polígonos regulares. Para que uma figura geométrica qualquer preencha um plano é preciso que todos os ângulos em torno do ponto onde figuras se encontram somem 360º. É possível pavimentar um plano com triângulos equiláteros, porque os seus ângulos internos medem 60º, e 60 é um divisor de 360, ($\frac{360}{60}$=6). Do mesmo modo um plano pode ser coberto por quadrados uma vez que os seus ângulos internos medem 90º e 90 é um divisor de 360, ($\frac{360}{90}$=4). Mas hexágonos regulares também cobrem o plano porque os seus ângulos internos medem 120º, e 120 é divisor de 360, ($\frac{360}{120}$=3).

Já com pentágonos regulares não é possível cobrir um plano, porque cada ângulo interno de um pentágono regular mede 108º, e 108 não é divisor de 360. A soma de três ângulos internos de um pentágono regular é 324º, deixando uma folga de 36º. Se essa folga for substituída por outro pentágono regular vamos ter uma sobreposição.

Problemas comuns do dia-a-dia, que surgem tanto na construção de imóveis como na decoração dos seus interiores, podem ser usados na sala de aula em diferentes níveis de ensino para trabalhar números e medidas. Exemplificam-se em seguida algumas situações que podem ser abordadas no 2º ciclo do ensino básico.

— Qual é escala da planta de um terreno na qual um comprimento de 48 metros foi representado no papel por um segmento medindo 2,4 dm?

Tem-se que, $\frac{\text{dimensão na planta}}{\text{dimensão real}} = \frac{2{,}4\text{dm}}{48\text{m}} = \frac{24\text{cm}}{4800\text{cm}} = \frac{1}{200}$

Então a escala da planta é 1:200.

— A planta de um andar está desenhado à escala 1 : 150. Será que se pode colocar um tapete circular com 4 metros de diâmetro numa sala retangular, que no desenho mede 2 cm × 3 cm?

Utilizando a escala 1 : 150, a 2cm corresponde 3m na realidade e a 3cm corresponde 4,5m na realidade. Então, a sala retangular é 3m x 4,5m, o que significa que não podemos colocar um tapete circular com 4 metros de diâmetro.

— Pretende-se pavimentar um terraço quadrado cujo lado mede 7,5 metros com ladrilho. Uma vez que o preço de assentamento dos ladrilhos é por m^2, será mais vantajoso usar ladrilho de 15 cm $\times$15 cm a 0,7 € ou de 20 cm $\times$ 20 cm a 1,2 € a unidade? Porquê?

A área do terraço é igual a 56,25 m^2

A área do ladrilho no primeiro caso é 15 $\times$15 = 225 cm^2 = 0.0225 m^2

A área do ladrilho no segundo caso é 20 $\times$20 = 400 cm^2 = 0.04 m^2

Quantos ladrilhos são necessarios?

No primeiro caso são $\frac{56,25}{0,0225} = 2500$ ladrilhos

No segundo caso são $\frac{56,25}{0,04} = 1406,25$ ladrilhos

Como cada ladrilho no primeiro caso custa 0,7€, o custo de pavimentar o terraço é 2500 $\times$0,7 = 1750€. Como cada ladrilho no segundo caso custa 1,2€, então o custo de pavimentar o terraço é 1407 $\times$1,2 = 1688,4€.

Então, é mais barato pavimentar o terreno com ladrilhos de 20$\times$20 embora o preço de cada unidade seja mais elevado.

— Num terreno retangular com 10 m por 25 m pretende-se construir um armazém ocupando no máximo 42% da sua área. Será possível o armazém ter uma planta quadrada com 11 metros de lado?

A resposta é não. Com efeito, a área do terreno é igual a 250 m^2. O armazém pode ocupar no máximo 105 m^2 = 0,42 $\times$250, e 11 $\times$11 = 121.

3. As funções no dia-a-dia

Ao exprimirmos o espaço em função do tempo, o número do sapato em função do tamanho dos pés, a intensidade da fotossíntese realizada por uma planta em função da intensidade de luz a que ela é exposta ou a identificação de cada pessoa em função da sua impressão digital, percebemos a importância do conceito de função para compreensão das relações entre os fenômenos físicos, biológicos e sociais.

As funções estão presentes no dia-a-dia nos mais diversos contextos. Por exemplo, a correspondência entre o número de pães que compramos e o preço a pagar, entre a velocidade média de um automóvel e o tempo de duração de uma viagem, são funções lineares. Já a função que traduz a altura atingida por um projétil lançado na vertical com uma determinada velocidade inicial é uma função quadrática. Também as funções transcendentes surgem na vida corrente, por exemplo, em fenómenos periódicos e no cálculo de juros compostos.

Seguem alguns exemplos de possíveis explorações em contexto escolar. Se nos casos da função linear e afim é simples a sua contextualização em situações simples do dia-a-dia, no que respeita às funções transcendentes procura-se a sua ligação à construção de modelos matemáticos de fenómenos do mundo real.

3.1 Função linear e função afim

A função linear e a função afim, que são estudadas no âmbito do ensino básico, podem ser contextualizadas em situações do dia-a-dia, como se exemplifica em seguida:

> — Numa padaria o preço a pagar por uma certa quantidade de pães é diretamente proporcional ao preço de uma unidade. Sabendo que um pão custa 12 cêntimos, quantos pães podemos comprar com 6,00€?

A função que traduz o preço de x pães é uma função de proporcionalidade direta em que a constante de proporcionalidade direta é o preço de cada pão. É uma função linear definida por $f(x) = 0{,}12 \times x$ e o número de pães que se podem comprar com 6 euros é

$x = \frac{6}{0{,}12} = 50.$

> — Um trabalhador de uma firma que se dedica à criação de jogos para computador tem um salário de 2000€ por mês acrescido de 20 € por cada jogo vendido. Quantos jogos terá ele que vender para ganhar, pelo menos, 2300 €?

A função que traduz o salário em função do número de jogos vendidos é uma função afim definida por $f(x) = 2000 + 20 \times x$.

Para receber 2300 €, deverá vender pelo menos um número x de jogos que verifique a equação $2000 + 20 \times x = 2300$, isto é, deverá vender pelo menos 15 jogos.

A proposta seguinte associa a descida da temperatura à medida que se sobe. Nos indicadores da posição do avião na generalidade dos voos comerciais podemos observar a diminuição da temperatura com a altitude. De facto, à medida é que o avião sobe, o ar seco expande-se e arrefece a uma taxa de cerca de 1ºC por cada 100 metros, até cerca de 12 quilómetros. A função que traduz a relação entre a temperatura e a altitude é uma função afim.

> — Um avião levanta voo de um local onde a temperatura do ar é 20ºC. Sabendo que a temperatura desce 1ºC por cada 100 metros de subida até cerca de 12 quilómetros, qual a variação de temperatura do ar expectável desde a descolagem até o avião atingir 5 quilómetros de altitude?

Por cada quilómetro de subida a temperatura desce 10ºC, pelo que a temperatura T é expressa em função da altitude h por $T(h) = 20 - 10 \times h$ para $0 \leq h \leq 12$. Como $T(0) = 20$ e $T(5) = 20 - 50 = -30$, é expectável que se tenha $-30ºC \leq T(h) \leq 20ºC$.

Observe-se que neste caso o gráfico da função T é uma reta com declive negativo.

3.2 Função de proporcionalidade inversa

A função de proporcionalidade inversa é estudada no âmbito do 3º ciclo do ensino básico. Surge habitualmente associada a problemas do dia-a-dia, como se ilustra em seguida.

— Quatro operários, trabalhando 8 horas por dia, fizeram uma obra em 15 dias. Supondo que mantinham o mesmo ritmo de trabalho, de quantos dias precisariam para fazer a mesma obra trabalhando 6 horas por dia?

Existe neste caso uma relação de proporcionalidade inversa entre o número y de dias trabalho e o número x de horas de trabalho por dia, devendo o produto $x \times y$ ser constante k. Como trabalhando 8 horas levam 15 dias a completar a obra, temos que $k = 8 \times 15 = 120$ pelo que, trabalhando 6 horas por dia, o número y de dias de trabalho deve ser tal que $6 \times y = 120$. Serão então necessários 20 dias de trabalho.

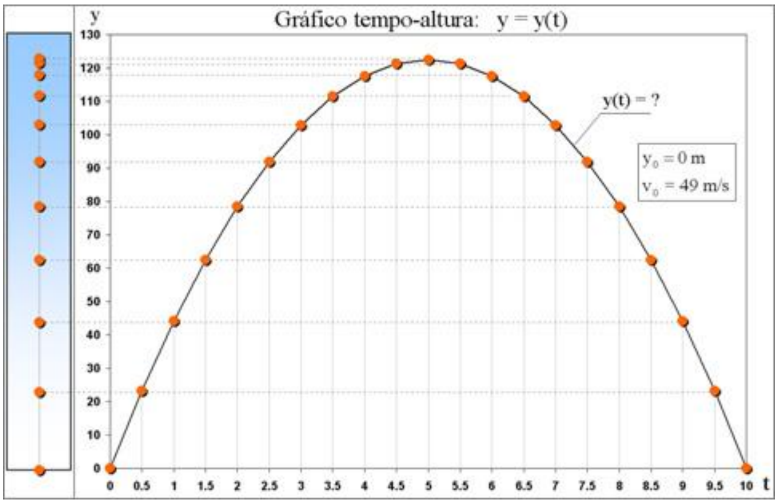
A função que traduz esta relação é definida por $f(x) = \frac{120}{x}$ e a constante de proporcionalidade inversa traduz o número de horas necessárias para a execução do trabalho.

3.3 Função quadrática

O estudo das funções quadráticas pode ser motivado através de um fenómeno físico bem conhecido: a ascensão e queda de um projétil lançado verticalmente de baixo para cima com velocidade inicial v_0, a partir de uma altura y_0.

Desprezando a resistência do ar, um corpo em movimento ascendente, ou em queda livre, está apenas sujeito à ação da força gravítica que a Terra exerce sobre ele. Neste movimento, a aceleração adquirida é constante, a aceleração da gravidade, sendo vertical, com sentido descendente.

Para obter experimentalmente o gráfico que traduz a distância ao solo de um projétil (lançado do solo com a velocidade inicial v_0 = 49m/s) pode-se recorrer, por exemplo, a uma sequência de fotografias obtidas de 0,5 s em 0,5 s dispondo-as lado a lado ao longo de um eixo horizontal, de acordo com uma escala adequada de tempo como se simula na figura.



A observação desta imagem sugere que a curva que melhor se ajusta aos pontos assinalados é uma parábola. Na realidade, a resistência do ar origina um amortecimento, pelo que a velocidade inicial e a aceleração da gravidade não são constantes mas, para projéteis de dimensão reduzida e velocidade inicial pequena, a ação retardadora do ar não é relevante, e ao gráfico de y = y (t) ajusta-se de uma forma muito aproximada uma parábola. Mais precisamente, e no caso de o movimento se realizar na Terra, para uma determinada velocidade inicial v_0 e uma determinada altura inicial y_0, a função que melhor se ajusta às posições fotografadas exprime-se analiticamente por $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$, em que $g = 9{,}8 m/s^2$ é a aceleração da gravidade terrestre.

Sendo a função $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$ uma função quadrática, este fenómeno pode ser usado para analisar os efeitos da variação dos parâmetros $b = v_0$ e $c = y_0$ da função quadrática que a modela, constituindo uma opção para introdução ao estudo geral desta família de funções no 10º ano de escolaridade.

Deve salientar-se que neste exemplo a função y tem como domínio o intervalo $[0, t_0]$ em que t_0 é o instante em que o projétil atinge o solo.

Questões como as seguintes podem ser exploradas neste contexto.

— Um projétil que é deixado cair com velocidade inicial nula de uma altura de 20 metros. Ao fim de quanto tempo é que ele chega ao solo?

$v_0 = 0,\ y_0 = 20\text{m},\ y(t) = 0$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \times 9{,}8 \times t^2 + 0 \times t + 20 = -4{,}9\ t^2 + 20$$

$- 4{,}9\ t^2 + 20 = 0$

$t^2 \approx 4{,}08$

$t \approx 2{,}02$ segundos

Assim, o projétil chega ao solo aproximadamente ao fim de 2 segundos.

— Ao fim de quanto tempo é que um projétil que é lançado de uma altura de 50 metros com uma velocidade inicial de 24 m/s atinge a altura máxima?

$v_0 = 24\text{m/s},\ y_0 = 50\text{m}$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \times 9{,}8 \times t^2 + 24 \times t + 50 = -4{,}9t^2 + 24 \times t + 50$$

Para determinar o instante em que o projétil atinge a altura máxima basta calcular a abcissa do vértice da parábola: $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{2 \times (-4{,}9)} \approx 2{,}45\ \text{s}$.

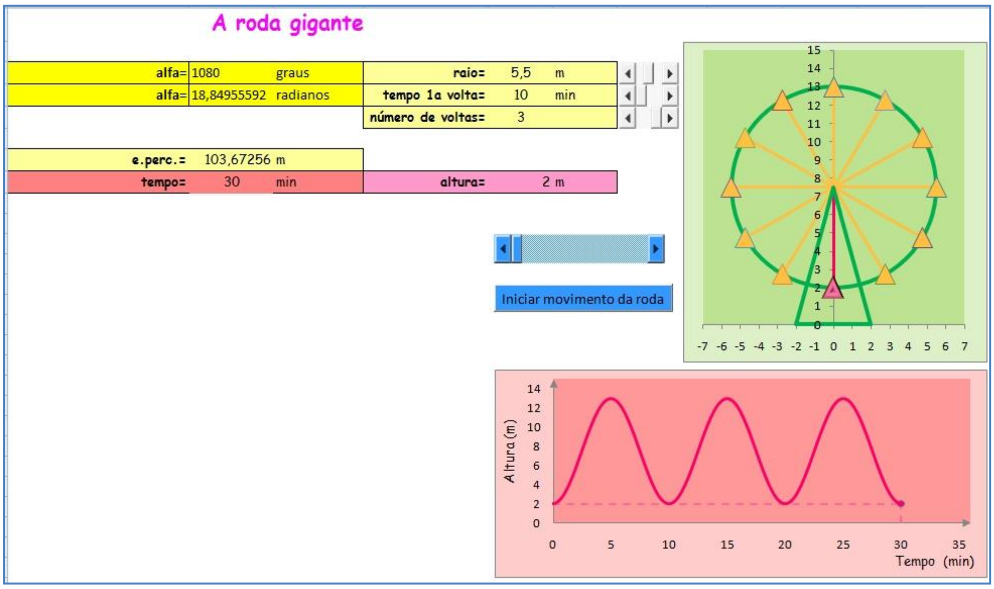
Aproximadamente ao fim de 2,5 segundos, o projétil, que foi lançado de uma altura de 50 metros com uma velocidade inicial de 24 m/s, atinge a altura máxima.

3.4 Funções trigonométricas

Dada a grande variedade de situações reais que podem ser modeladas através de funções trigonométricas, o estudo destas pode ganhar especial interesse com a análise de situações concretas.

Todos nós conhecemos as rodas gigantes das feiras ou dos parques de diversões. Qual a função que traduz a relação entre a altura a que se encontra um passageiro numa roda gigante e o tempo?

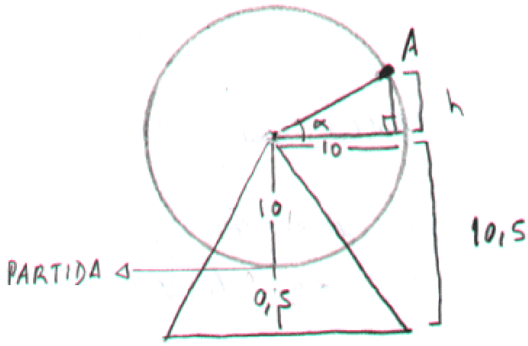
Em [3a] é apresentada uma simulação do movimento de uma roda gigante. À medida que esta vai girando, a aplicação mostra o traçado da representação gráfica da função que exprime a altura a que se encontra uma determinada cadeira em função do tempo.



A determinação da expressão analítica desta função, fundamental para a construção desta aplicação, pode ser levada a cabo com alunos do ensino secundário.

Vamos imaginar que uma roda leva 12 cadeiras igualmente espaçadas ao longo do seu perímetro, que o seu raio mede 10 metros e que o ponto mais baixo atingido ao longo do percurso circular está a 0,5 metros do solo. Sabe-se também que uma roda demora cerca de 30 segundos a efetuar uma rotação completa. Como varia a distância a que se encontra um passageiro do solo, durante o seu passeio?

Queremos determinar a distância a que se encontra um passageiro do solo, essa distância será obviamente a altura a que esse passageiro se encontra do solo.



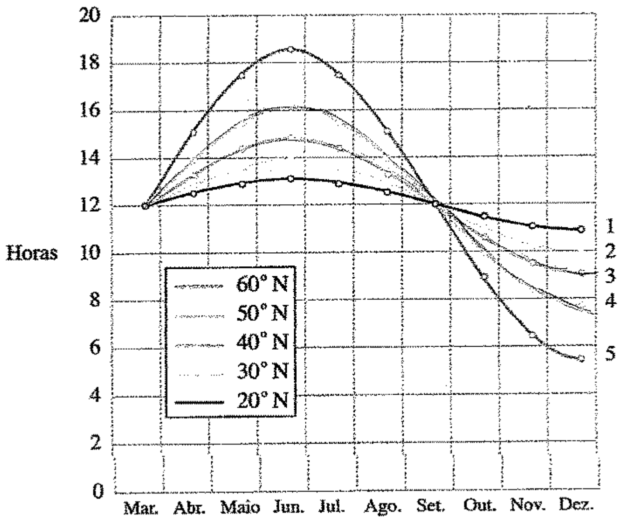
Tomemos um ponto A genérico na roda. Consideremos o triângulo retângulo assinalado na figura. Pretendemos determinar o valor de h. Sabemos que sen $\alpha = \frac{h}{10}$.

Logo, $h = 10 \times \text{sen } \alpha$. Mas o ângulo α irá ser uma função do tempo, $\alpha = \alpha(t)$, e como sabemos que a roda demora 30 segundos a efetuar uma volta completa (2π), ao fim de t segundos roda $\frac{2\pi t}{30} = \frac{\pi t}{15}$. Portanto, $\alpha(t) = \frac{\pi t}{15}$ e $h = h(t) = 10 \times \text{sen } (\frac{\pi t}{15})$, com t pertencente ao intervalo fechado de [0,30].

Tendo em conta que a roda tem raio igual a 10 metros e está a 0,5 metros do solo a função que, em cada instante t, traduz a distância a que se encontra um passageiro do solo é definida por $d(t) = 10 \times \text{sen } (\frac{\pi t}{15}) + 10{,}5$.

O problema anterior não é, obviamente, uma aplicação da Matemática no dia-a-dia. Num passeio na roda gigante ninguém quer saber a que altura está num dado instante. Mas este problema permite construir o modelo de uma situação concreta e ilustrar a ligação entre o círculo trigonométrico e a função seno. Já a situação seguinte tem um contexto real.

— A figura seguinte mostra vários números de horas de luz solar de 21 de março a 21 de dezembro como uma função da época em diversas latitudes. Uma cidade está localizada a aproximadamente 40ºN latitude. Pretende-se encontrar uma função que modele a duração da luz solar durante os dias de 21 de junho a 21 de dezembro nessa cidade.



Fonte: Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (Nova York: Silver, Burdett, 1935, p. 40.)

Os gráficos de funções trigonométricas são regidos por uma equação que explicita suas translações. Analisamos, por exemplo, como se desloca e estica a função trigonométrica $f(x) = a + b \times \text{sen}\,(c \times (x + d))$ a partir de $y = \text{sen}\, x$.

Os valores de a e de b alteram os valores de y e os valores de c e de d alteram os valores de x.

Se $a > 0$ o gráfico da função desloca-se a unidades para cima, se $a < 0$ o gráfico da função desloca-se a unidades para baixo. Se $d < 0$, o gráfico da função desloca-se d unidades para a direita, se $d > 0$, o gráfico da função desloca-se d unidades para a esquerda.

A constante c altera o período da função. Se $c > 1$ o gráfico da função encolhe-se segundo eixo OX, se $0 < c < 1$, o gráfico da função estica-se segundo eixo OX, se $c <-1$, o gráfico da função encolhe-se segundo OX e fica simétrico em relação ao eixo OY, se $-1 < c < 0$, o gráfico da função estica-se segundo OX e fica simétrico em relação ao eixo OY.

Se $b > 1$ o gráfico da função estica-se na vertical, se $0 < b < 1$ o gráfico da função encolhe-se na vertical, se $b < -1$ o gráfico da função estica-se segundo OY e fica simétrico em relação ao eixo OX, se $-1 < b < 0$, o gráfico da função encolhe-se segundo OY e fica simétrico em relação ao eixo OX.

No desenho cada curva assemelha-se ao gráfico da função seno deslocado e esticado. Analisamos a curva 3 que corresponde a 40º de latitude. Como mostra o gráfico, nesta latitude a luz do dia, dura cerca de 14,8 horas em 21 de junho e 9,2 horas em 21 de dezembro, assim, a amplitude da curva (o fator pelo qual esticamos verticalmente a curva do seno) é $b=\frac{1}{2}\ (14{,}8-9{,}2) = 2{,}8 > 0$, então esticamos vertical a curva segundo o fator 2,8.

Se a medida do tempo t for em dias, por qual fator deveremos esticar horizontalmente a curva do seno?

Como temos cerca de 365 dias em um ano, o período de nosso modelo deve ser de 365 dias. Mas o período de y = sen t é 2π, então a amplitude c = $\frac{2\pi}{365}$, esticamos horizontalmente a curva segundo o fator c, porque 0< $\frac{2\pi}{365}$ < 1.

Notamos que a curva começa seu ciclo em 21 de março, 80º dia do ano, a curva é deslocada horizontalmente em d = 80 unidades para a direita. Alem disso, o gráfico é deslocado verticalmente a = 12 unidades para cima. Então, seguido o gráfico temos uma translação segundo o vetor (80;12). Assim, modelamos o comprimento dos dias nesta cidade no t-ésimo dia do ano (onde a=12, b=2,8, c= 2π/365, d=80) pela função:

$$L(t) = 12 + 2{,}8 \times \mathrm{sen}(\frac{2\pi}{365}(t - 80)).$$

3.5 Função exponencial

Designamos por função exponencial qualquer função da forma $f(x) = a^x$ sendo a uma constante positiva diferente de 1. As funções deste tipo são caracterizadas por crescimento e decrescimento rápido e surgem na modelação de fenómenos naturais, com o que se ilustra em seguida.

— Se uma espécie de bactéria duplica cada 10 minutos, começando com uma só bactéria, ao fim de uma hora quantas bactérias temos?

Ao fim de 10 minutos teremos 2 bactérias, 4 ao fim de 20, 8 ao fim de 30, 16 ao fim de 40, 32 ao fim de 50 e 64 ao fim de 60 minutos, isto é, ao fim de uma hora teremos $64 = 2^6 = 2^{60/10}$ bactérias.

Ao fim de t minutos o número de bactérias será dado por $2^{t/10}$, pelo que ao fim de um dia o número de bactérias será $2^{1440/10}$.

Se inicialmente tivéssemos N_0 bactérias e se o seu número duplicasse em cada 10 minutos, a função que exprime o número de bactérias em função do tempo é definida por $N(t) = N_0 \times 2^{t/10} = N_0 \times e^{(t/10) \ln 2}$.

Se o fator de crescimento for k e τ o tempo para que ele se realize, o número de bactérias ao fim do tempo t é dado por $N(t) = N_0 \times k^{t/\tau}$.

Surgem habitualmente em manuais escolares problemas do tipo:

— Sob certas condições, o número de bactérias B de uma cultura, em função do tempo t, medido em horas, é dado por $B(t) = 2^{t/12}$. Qual será o número de bactérias 6 dias após a hora zero?

Tem-se que 6 dias = $6 \times 24 = 144$ horas.
$B(t) = 2^{t/12}$
$B(144) = 2^{144/12}$
$B(144) = 2^{12} = 4096$ bactéries.

Com este enunciado tudo se resume a calcular o número de horas correspondente a 6 dias e aplicar uma fórmula. Este problema torna-se interessante se originar uma discussão sobre quais serão as “certas condições”. Neste caso, a cultura começa com uma só bactéria que duplica em cada 12 horas.

Problemas envolvendo juros compostos constituem uma aplicação da função exponencial tratada na página 52 a propósito da Matemática Financeira.

3.6 Função logarítmica

Retomemos o crescimento de uma população de bactérias. Se, partindo de N_0 bactérias, o número de bactérias duplicar ao fim de cada τ minutos, o número N_t de bactérias ao fim de t minutos é dado por $N_0 2^{t/\tau}$. Então $(t/\tau) = \log_2 (N_t/N_0)$ pelo que o tempo t que a cultura leva a atingir N_t bactérias é $t = \tau \log_2 (N_t/N_0)$. Assim,
o tempo que uma população de N_0 bactérias leva a atingir uma população N_t é uma função logarítmica.

Analisemos o seguinte problema:

— O número de bactérias ao fim de t horas de uma cultura é dado pela expressão $N(t) = 1200 \times 2^{0,4t}$. Quanto tempo após o início da experiência a cultura terá 19200 bactérias?

Uma resolução direta seria ter em conta que $N(t) = 1200 \times 2^{0,4t}$ e $N(t) = 19200$ e resolver a equação em ordem a t:

$1200 \times 2^{0,4t} = 19200$; $2^{0,4t} = \dfrac{19200}{1200} = 16 = 2^4$, pelo que $0,4t = \log_2(2^4) = 4$ e assim

$t = \dfrac{4}{0,4}$ t = 10 h.

Esta opção, embora perfeitamente legítima, não obriga a qualquer interpretação do problema. Poder-se-ia optar por um enunciado que a motivasse, por exemplo:

— O número de bactérias ao fim de t horas de uma cultura é dado pela expressão $N(t) = 1200 \times 2^{0,4t}$.

a) Qual o número inicial de bactérias?
b) Qual o fator de crescimento e o tempo necessário para ele se realize?
c) Quanto tempo após o início da experiência a cultura terá 19200 bactérias?

De $N(t) = 1200 \times 2^{0,4t} = 1200 \times 2^{t/2,5}$ decorre que o número inicial de bactérias é $N_0=1200$ e que o seu número duplica em cada 2,5 horas.

Assim, o tempo que a população de 1200 bactérias leva a atingir uma população de 19200 é dada por

$$t = 2,5 \times \log_2\left(\frac{19200}{1200}\right) = 2,5 \times \log_2(16) = 2,5 \times \log_2(2^4) = 2,5 \times 4 = 10 \text{ horas}$$

4. O número de ouro

"*Algumas das maiores mentes matemáticas de todas os tempos, desde Pitágoras e Euclides na Grécia antiga, passando pelo matemático italiano medieval Leonardo de Pisa e pelo astrónomo renascentista Johannes Kepler, até aos dias de hoje com figuras científicas como o físico de Oxford Roger Penrose, gastaram horas intermináveis com esta relação simples e as suas propriedades. Mas o fascínio com a Razão Áurea não se limita apenas aos matemáticos. Os biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até mesmo místicos têm ponderado e debatido as razões da sua ubiquidade e poder apelativo. Na verdade, é provavelmente justo dizer que a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas, como nenhum outro número na história da matemática.*"

Lívio M., *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number* (2002)

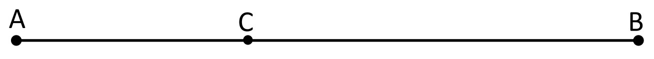
Pretende-se neste capítulo tirar partido do "fascínio com a Razão Áurea" para explorar atividades que potenciem o estabelecimento de conexões dentro da própria matemática.

O que é o número de ouro?

Se quiséssemos dividir um segmento *AB* em duas partes, teríamos uma infinidade de maneiras de o fazer. Uma delas é a divisão em média e extrema razão definida por Euclides no livro VI de "os Elementos":

"Um segmento de reta diz-se dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo".

Considere-se um segmento de reta AB: um ponto C divide este segmento em média e extrema razão se $\overline{AC}/\overline{CB} = \overline{CB}/\overline{AB}$



Designando respetivamente por x e y as medidas dos segmentos de reta AC e CB, pretende-se determinar a razão $\frac{x}{y}$, para a qual $\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y}$.

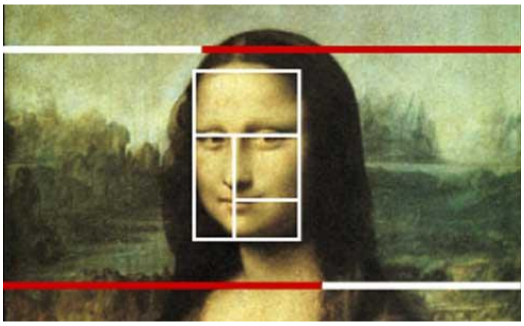
Tem-se que a igualdade $\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y}$ é equivalente a $x^2 + xy = y^2$.

Resolvendo esta equação em ordem a *y* obtém-se $y = \frac{x \pm x\sqrt{5}}{2} = \frac{x\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$. Tendo em conta que x e y representam medidas tem-se apenas $y = \frac{x\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$, pelo que $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,61803398875…

A razão entre os comprimentos dos segmentos CB e AC é o número de ouro ou razão áurea. A divisão de um segmento feita segundo essa proporção denomina-se divisão áurea, também denominado Divina Proporção pelo matemático Luca Pacioli ou secção áurea segundo Leonardo da Vinci.

O número de ouro é designado por φ (Phi) em homenagem a Phídeas, o arquiteto do Partenon Grego , templo representativo do século de Péricles construído entre 447 e 433 a.C.. Na fachada deste templo está presente o número de ouro na razão entre a largura e a altura do retângulo maior representado na figura. Os retângulos em que a razão entre o lado maior e o lado menor é a razão de ouro designam-se por retângulos de ouro.

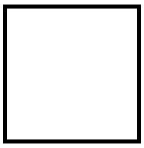
Muitos artistas e arquitetos usaram proporções nos seus trabalhos que aproximassem a razão áurea usando sobretudo retângulos de ouro (à semelhança do que se passa no Partenon). Esta opção teve por base a convicção de que estes retângulos eram visualmente agradáveis. Um exemplo é o quadro Mona Lisa, onde se observa a proporção de ouro em várias situações. Ao construir um retângulo em torno do rosto, verifica-se que se trata de um retângulo de ouro. Se subdividir este retângulo usando a linha dos olhos para traçar uma reta horizontal obtemos de novo a proporção de ouro.



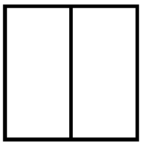
Sobre a imagem do Partenon está construída uma sequência de retângulos de ouro. De facto, se desenharmos um retângulo de ouro este pode ser dividido num quadrado e noutro retângulo de ouro, podendo este processo pode ser repetido indefinidamente.

Como construir um retângulo de ouro?

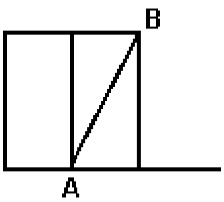
i. Desenhamos um quadrado de lado unitário;



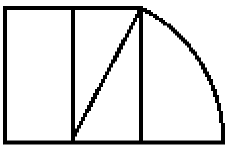
ii. Dividimos um dos lados do quadrado ao meio;



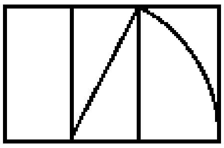
iii. Traçamos uma diagonal do vértice A do último retângulo ao vértice oposto B e prolongamos a base do quadrado;



iv. Usando a diagonal como raio, traçamos um arco do vértice direito superior do retângulo à base que foi prolongada;



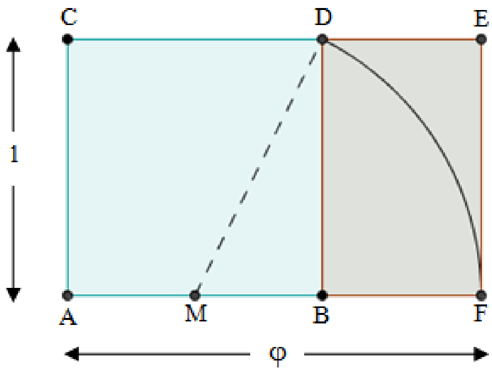
v. Pelo ponto de intersecção do arco com o segmento da base traçamos um segmento perpendicular à base. Prolongamos o lado superior do quadrado até encontrarmos este último segmento para formar o retângulo.



O retângulo construído é um retângulo de ouro.

Com efeito, $\overline{MF} = \overline{MD} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, pelo que a medida do lado maior do retângulo é igual a $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Está decomposto num quadrado e num retângulo. Verifiquemos que o novo retângulo também é de ouro.



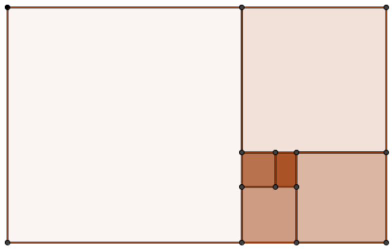
Tem-se $\overline{DE} = \varphi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Multiplicando e dividindo por $\sqrt{5}+1$ obtém-se

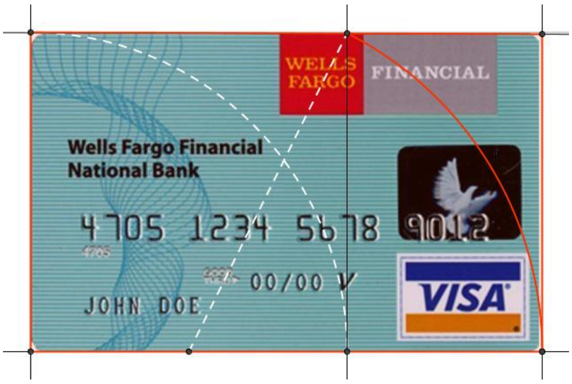
$$\overline{DE} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{4}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\varphi}.$$

Então $\frac{\overline{EF}}{\overline{DE}} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi$ e o retângulo BDEF é um retângulo de ouro.

Continuando o processo obtemos uma sequência de retângulos de ouro: o primeiro com lados 1 e φ, o segundo com lados $1/\varphi$ e 1, o terceiro com lados $1/\varphi^3$ e $1/\varphi^2$, e assim sucessivamente.

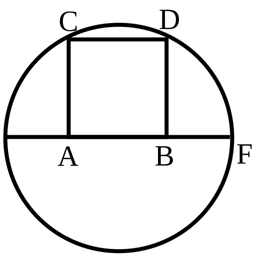


Encontramos aproximações do retângulo de ouro, por exemplo, no caso dos cartões de crédito, nos bilhetes de identidade, no novo modelo da carta de condução, nos cartazes de publicidade, nas caixas dos cereais e até nos maços de tabaco. Na figura está representado um retângulo de ouro construído sobre um cartão de crédito.

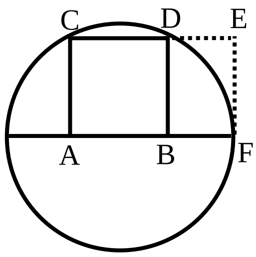


A descoberta do número de ouro associado à razão de medidas em figuras geométricas proporciona a revisão de conceitos elementares como igualdade e semelhança de figuras planas e propriedades dos polígonos regulares, como se exemplifica em seguida.

— Verifique que, no quadrado inscrito num semicírculo como mostra a figura, a razão $\overline{AF}/\overline{AB}$ é a razão de ouro.

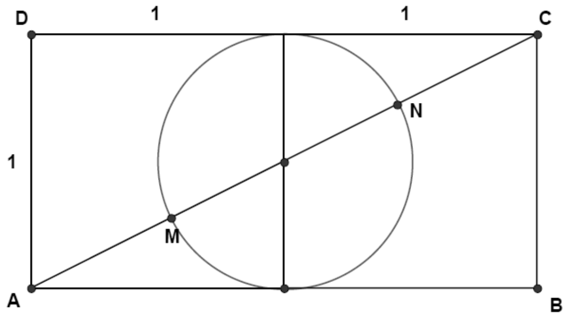


Para o verificar basta ter em conta que a circunferência tem centro no ponto médio do segmento de reta AB, pelo que o retângulo com vértices ACEF é de ouro.



O enunciado seguinte é adaptado do item "Número de ouro no retângulo" do projeto "1001 itens" que pode ser trabalhado no âmbito do 9º ano.

— Dois quadrados unidos por um dos seus lados formam o retângulo [ABCD], com lados que medem, respetivamente, 1 e 2 unidades de medida. A diagonal [AC] interseta o lado comum aos dois quadrados. Centrada nesse ponto de intersecção, desenha-se uma circunferência de diâmetro 1, que interseta [AC] nos pontos M e N.
Verifique que a medida do segmento de reta com extremos A e N é igual ao número de ouro.



Designemos por O o centro da circunferência inscrita e por S o ponto de interseção da reta AB com a circunferência.

Tem-se $\overline{AN} = \overline{AO} + \overline{ON}$ e $\overline{ON} = \frac{1}{2}$. Utilizando o teorema de Pitágoras,

$$\overline{AO} = \sqrt{\left(\overline{AS}\right)^2 + \left(\overline{OS}\right)^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.\text{ Assim, } \overline{AN} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Também no pentágono regular está presente o número de ouro:

A razão entre a medida de uma qualquer diagonal e a medida do lado de um pentágono regular é igual ao número de ouro. Assim, se a medida do lado é igual a 1, o comprimento de qualquer diagonal é igual ao número de ouro.

É interessante trabalhar esta propriedade no início do 10º ano para rever temas estudados no 3º ciclo, nomeadamente, polígono regular, ângulo inscrito numa circunferência, semelhança de figuras planas, resolução de equações do 2º grau e operações com radicais.

Completando uma sequência de passos como a que segue, os alunos serão conduzidos à determinação da medida de qualquer diagonal de um pentágono regular unitário.

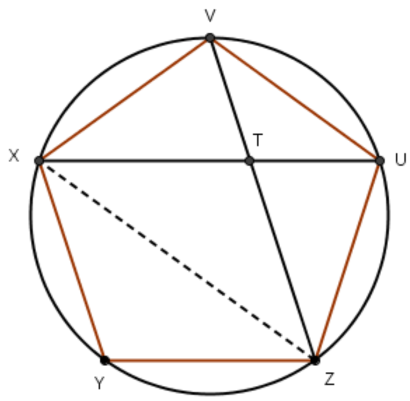
— A figura representa um pentágono regular unitário inscrito numa circunferência e seja x a medida do segmento de reta XZ.
a) Calcule as medidas dos ângulos internos dos triângulos [XVZ] e [TUZ].

b) Justifique que os triângulos [XVZ] e [TUZ] são semelhantes.

c) Verifique que $\overline{XT}=1$ e $\overline{TU}=\frac{1}{x}$ e justifique a igualdade $x=1+\frac{1}{x}$.

d) Conclua que a medida de qualquer diagonal do pentágono regular unitário é igual ao número de ouro.

e) Se a medida do lado do pentágono regular for igual a 3, qual será a medida de qualquer uma das suas diagonais.



a) A medida de um ângulo interno de um pentágono regular é:
$\alpha=\frac{180\times(n-2)}{n}=\frac{180\times(5-2)}{5}=108^{o}$, então o ângulo $\angle$ XYZ=108º.
O triângulo [XYZ] é isósceles, tem dois lados iguais, pelo que os ângulos $\angle$ YXZ e $\angle$ YZX são iguais com amplitudes $\frac{180^{o}-108^{o}}{2}=36^{o}$.
Então $\angle ZXY=\angle ZVX=108^{o}-36^{o}=72^{o}$, porque o triângulo [XVZ] também é isósceles. $\angle XZV=180^{o}-2\times72^{o}=36^{o}$.

O trapézio [XVUZ] é isósceles, $\angle VXZ = \angle UZX = 72^o$, $\angle TZU = 72^o - 36^o = 36^o$, $\angle XVZ = \angle XUZ = 72^o$, $\angle UTZ = 180^o - 72^o - 36^o = 72^o$. Então, as medidas dos ângulos internos dos triângulos [XVZ] e [TUZ] são 72º,72º,36º respetivamente.

b) Os triângulos [XVZ] e [TUZ] são semelhantes, porque têm todos ângulos iguais.

c) $\overline{XZ} = x$ é uma diagonal do pentágono. A medida do lado do pentágono é igual a 1,

$\overline{XV} = 1$, mostramos que $\overline{XT} = 1$ e $\overline{TU} = \frac{1}{x}$. $\angle XTV = \angle XVT = 72^o$, então o triângulo [XTV] é isósceles e $\overline{XT} = \overline{XV} = 1$.

Como os triângulos [XVZ] e [TUZ] são semelhantes existe a relação de proporcionalidade: $\frac{\overline{XZ}}{\overline{ZU}} = \frac{\overline{XV}}{\overline{TU}}$, $\overline{ZU} = \overline{XV} = 1$, $\frac{x}{1} = \frac{1}{\frac{1}{x}}$. Daqui $\overline{TU} = \frac{1}{x}$.

$x = \overline{XZ} = \overline{XU} = \overline{XT} + \overline{TU} = 1 + \frac{1}{x}$.

d) Se desenhamos a altura do triângulo [XTZ], então cos $\angle ZXT$ = cos 36º=

$\frac{\overline{XZ}}{2} : \overline{XT} = \frac{x}{2} : 1$, daqui $x = 2 \times \cos 36^o = 2 \times \cos \frac{\pi}{5} = 1{,}1680... \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Assim, se a medida do lado do pentágono é igual a 1, o comprimento de qualquer diagonal é igual ao número de ouro.

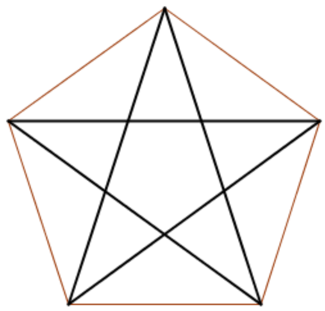
e) Como os triângulos [XVZ] e [TUZ] são semelhantes existe a relação de proporcionalidade: $\frac{\overline{XZ}}{\overline{ZU}} = \frac{\overline{XV}}{\overline{TU}}$, $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$, $x \times (x-1) = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$. A raiz desta equação é o número de ouro: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}16180399... = \varphi$.

Então, a razão entre a medida de uma qualquer diagonal e a medida do lado de um pentágono regular é igual ao número de ouro.

Se a medida do lado do pentágono regular for igual a 3, então $\frac{d}{3} = \varphi$, e a medida de qualquer uma das suas diagonais d será: d = 3 $\times$ φ.

Se desenharmos todas as diagonais de um pentágono regular, obtemos uma estrela de cinco pontas ou pentagrama, símbolo da Escola Pitagórica.

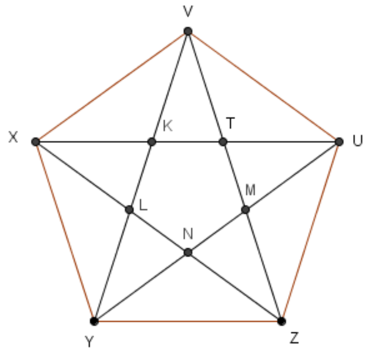
O centro da estrela é também um pentágono regular. Que relação existe entre as medidas dos lados dos dois pentágonos?



Na continuação da proposta anterior relativa às diagonais de um pentágono regular é natural a seguinte formulação:

- A figura representa um pentagrama em que $\overline{XV}=1$.

Tendo em conta que $\overline{XT}=1$ e $\overline{TU}=\frac{1}{\varphi}$, determine a medida do lado do pentágono regular [KTMNL] em função de φ.



$$\overline{KT}=\overline{XU}-2\times\overline{TU}=1+\frac{1}{\varphi}-2\times\frac{1}{\varphi}=1+\frac{1}{\varphi}-\frac{2}{\varphi}=1-\frac{1}{\varphi}$$

“De Divina Proportione”, uma obra em três volumes da autoria de Luca Pacioli, foi publicada em 1509. Embora muitas vezes seja dito que Pacioli defendeu a aplicação da proporção áurea para definir proporções harmoniosas , segundo Mário Livio, na verdade Pacioli defendeu o sistema Vitruviano de proporções racionais. Este sistema deve-se aos estudos de Marco Vitruvio Polião, arquiteto romano do século 1 a.C., que apresentou em sua obra *Os dez livros de Arquitetura*, entre outras coisas, o conceito da divina proporção do corpo humano. A obra de Vitrúvio foi copiada no final da Idade Média, início do Renascimento. Nos nossos dias existem cerca de 80 manuscritos conhecidos sobre o "*De Architectura*", porém, pouquíssimos apresentam as ilustrações originais executadas pelo próprio Vitrúvio. Mesmo quando estas estão presentes, restam dúvidas quanto à sua fidelidade relativamente às originais.

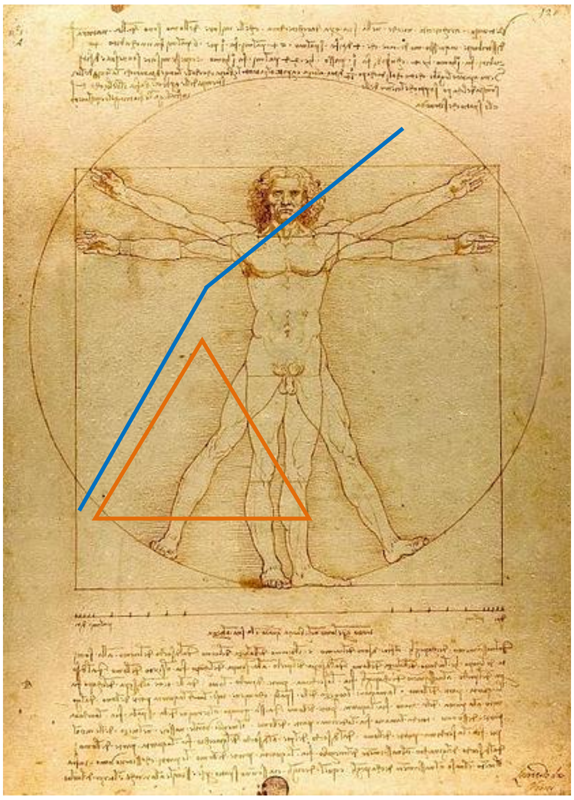
No terceiro livro, Vitrúvio descreve as proporções do corpo humano masculino:

- um palmo é o comprimento de quatro dedos
- um pé é o comprimento de quatro palmos
- um côvado é o comprimento de seis palmos
- um passo são quatro côvados
- a altura de um homem é quatro côvados
- o comprimento dos braços abertos de um homem (envergadura dos braços) é igual à sua altura
- a distância entre a linha de cabelo na testa e o fundo do queixo é um décimo da altura de um homem

- a distância entre o topo da cabeça e o fundo do queixo é um oitavo da altura de um homem
- a distância entre o fundo do pescoço e a linha de cabelo na testa é um sexto da altura de um homem
- o comprimento máximo nos ombros é um quarto da altura de um homem
- a distância entre o meio do peito e o topo da cabeça é um quarto da altura de um homem
- a distância entre o cotovelo e a ponta da mão é um quarto da altura de um homem
- a distância entre o cotovelo e a axila é um oitavo da altura de um homem
- o comprimento da mão é um décimo da altura de um homem
- a distância entre o fundo do queixo e o nariz é um terço do comprimento do rosto
- a distância entre a linha de cabelo na testa e as sobrancelhas é um terço do comprimento do rosto
- o comprimento da orelha é um terço do da face
- o comprimento do pé é um sexto da altura

O homem descrito por Vitruvio apresenta-se como um modelo ideal para o ser humano, cujas proporções são perfeitas, segundo o ideal clássico de beleza.

O "Homem de Vitruvio", é um desenho de Leonardo da Vinci datado de cerca de 1490 e baseado nas relações das proporções ideais no corpo humano com a geometria, descritas por Vitruvio:



"*Se abrir as pernas de forma a diminuir de um catorze-avos a sua altura, e se estender os braços de forma que a ponta dos dedos fique ao nível da sua altura, ficará a saber que o centro dos seus membros estendidos será no umbigo, e que o espaço entre as suas pernas será um triângulo equilátero.*"

Observe-se que no desenho as pontas dos dedos quando os braços estão estendidos ao nível da altura e os pés são tangentes a uma circunferência centrada no umbigo e o espaço entre as pernas afastadas é um triângulo equilátero.

5. Problemas da otimização

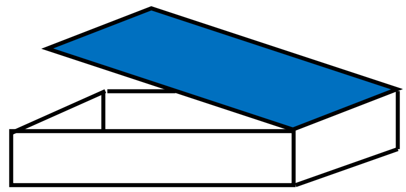
Em Matemática, otimização é a seleção de um melhor elemento (no que diz respeito a alguns critérios) a partir de um conjunto de alternativas possíveis. A investigação operacional analisa os sistemas complexos, construa modelos que descrevam as relações entre as variáveis do sistema, e a sua resolução com a solução mais eficiente.

Os resultados dos modelos da otimização permitem compreender e prever o comprimento dos sistemas e apõem os gestores no processo de tomar decisões. Nos casos mais simples, um problema de otimização consiste em maximizar ou minimizar uma função real, num dado conjunto.

Os métodos para encontrar valores extremos têm aplicações em muitas áreas do dia-a-dia. Por exemplo, quando um negociante quer minimizar custos e maximizar lucros; quando um viajante quer minimizar o tempo de transporte; quando obtemos misturas ótimas, por exemplo, para rações de animais; quando resolvemos os problemas de gestão organizacional de recursos; quando planificamos produção e armazenamento; quando definimos estratégias militares. Na prática encontramos vários problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros, e minimizar distâncias, tempo e custos.

O problema seguinte pode ser resolvido no âmbito do ensino secundário e envolve a determinação do máximo de uma função polinomial de terceiro grau.

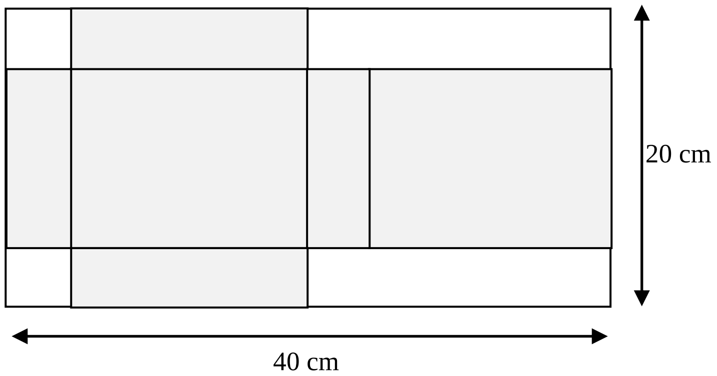
— Pretende-se construir caixas com tampa como a da figura usando, para cada caixa, um retângulo de cartolina de 40 cm × 20 cm.



Será que se pode construir uma caixa com 10 cm de altura?

Quais deverão ser as dimensões da caixa para o seu volume ser máximo?

Planificação da caixa:



Suponhamos que x é a altura da caixa.

O volume da caixa é função de x dada por $V(x) = \frac{(40-2x)}{2}(20-2x)x$ ou seja $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 400x$. Verifica-se imediatamente que V(0) = 0 e V(10) = 0, pelo que não se pode construir uma caixa com 10 cm de altura.

A função a ser otimizada é $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 400x$, $0 < x < 10$. Para isso derivamos a função e determinamos os pontos críticos:

$V'(x) = 6x^2 - 120x + 400 = 0$

As raízes desta equação do 2º grau são $x_1 = \frac{60 - \sqrt{1200}}{6}$ e $x_2 = \frac{60 + \sqrt{1200}}{6}$

Os pontos críticos são: x = 4,23 ou x = 15,77

O volume da caixa nos pontos críticos x = 0, x = 4,23 ou x = 10:

V(0) = 0 V(4,23) = 1539,6 V(10) = 0

O máximo da função é 1539,6 no ponto x = 4,23. Concluímos que a altura da caixa deverá ser proximamente 4,23 cm para que o seu volume seja o máximo.

Para maximizar ou minimizar funções lineares sujeitas a restrições usa-se a Programação Linear, uma técnica de otimização de resultados (como o lucro máximo ou o menor custo), num modelo matemático cujos requisitos são representados por relações lineares.

Os modelos de Programação Linear são implementados por meio da elaboração de sistemas lineares constituídos por um conjunto de equações e inequações que descrevem as restrições do sistema real em estudo e uma equação para descrever a função objetivo que expressa o parâmetro a ser maximizado ou minimizado.

O programa do ensino secundário prevê a resolução de problemas de maximização ou minimização de funções objetivo lineares de duas variáveis em regiões admissíveis poligonais, que poderão ser resolvidos por métodos geométricos ou analíticos.

Analisemos um exemplo, adaptado de [5b]:

— Uma pequena fábrica de artesanato produz vasos e potes, grandes e decorativos, de cerâmica. Estas peças são produzidas por oleiros e decoradas manualmente por pintores. Cada pote demora 3 horas a fabricar e 2 horas a decorar. Cada vaso demora 2 horas a fabricar e 4 horas a decorar. Na fábrica há 2 oleiros e 3 pintores e todos eles trabalham 40 horas por semana. Como são verdadeiras obras de arte, pretende-se que cada pote proporcione um lucro de 100€ e cada vaso um lucro de 225€. Qual o número de peças a produzir numa semana de modo a maximizar o lucro da fábrica?

A tabela seguinte sistematiza os dados do problema.

	Pote	Vaso	Nº de empregados	Nº de horas semanais
Fabrico	3 horas	2 horas	2	80
Decoração	2 horas	4 horas	3	120
Preço	100€	225€		

Identificação das variáveis

x nº de potes produzidos por semana

y nº de vasos produzidos por semana

Definição da função objetivo

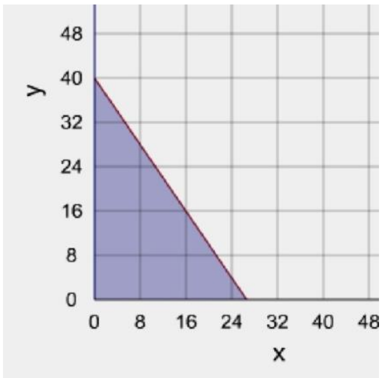
Função objetivo é uma equação do primeiro grau que descreve o parâmetro que se deseja maximizar ou minimizar: L (x, y) = 100 x + 225 y**.**

Definição das restrições

Como x e y representam o número de potes e de vasos produzidos numa semana não podem assumir valores negativos. As restrições positivas reduzem o espaço de admissibilidade ao 1º quadrante, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

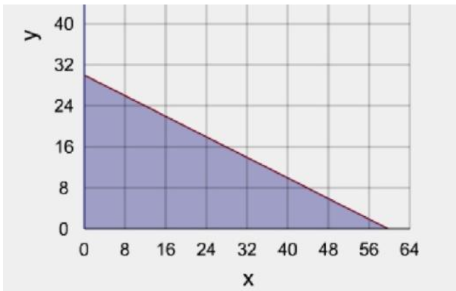
Cada oleiro demora 3 horas a fabricar cada pote e 2 horas a fabricar cada vaso. No entanto, a fábrica apenas dispõe de 2 oleiros e cada oleiro trabalha 40 horas por semana.

Daí provém a restrição: $3x + 2y \leq 80$.

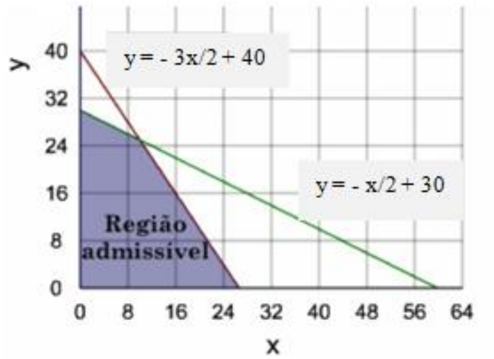


Cada pintor demora 2 horas a decorar cada pote e 4 horas a decorar cada vaso. Mas, a fábrica apenas dispõe de 3 pintores e cada um deles trabalha 40 horas por semana.

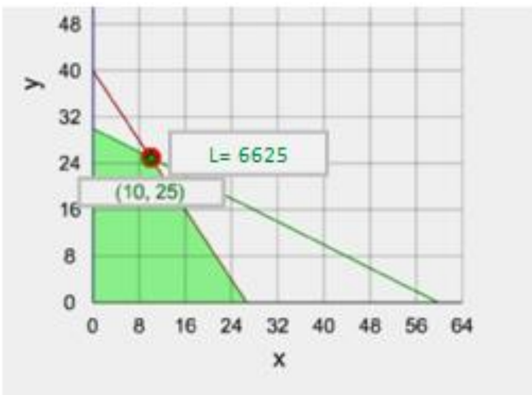
Daí provém a restrição: $2x + 4y \leq 120$



As restrições são assim, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \leq 80$, $2x + 4y \leq 120$, isto é
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq -3x/2 + 40$, $y \leq -x/2 + 30$

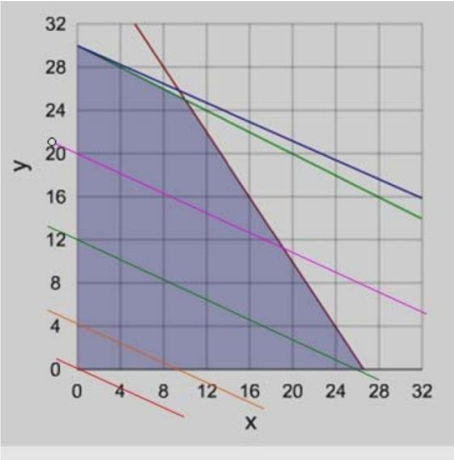


A região sombreada é um polígono que representa o conjunto dos pontos viáveis. Ao ponto (10,25) de intersecção das duas retas corresponde um lucro de 6625.



Retas de nível

Designa-se por reta de nível com equação do tipo Ax + By = k, toda a reta sobre a qual a forma linear toma sempre o mesmo valor de k.



Neste caso as retas de nível têm equação 100x + 225y = k.

100x + 225y= 0
100x + 225y= 900
100x + 225y = 2700
100x + 225y = 4500
100x + 225y = 6750 reta de maior nível (com maior ordenada na origem).

Solução ótima. Lucro máximo

Entre a determinada região de soluções deve ser procurado o ponto (é sempre um dos vértices) que define o máximo valor para a função objetivo. Neste caso define o maior número de peças a produzir numa semana de modo a maximizar o lucro.

x	y	L=100x+225y
0	0	0
0	30	6750
10	25	6625
26	0	2600

O vértice (0,30) é a solução do problema, pois é a opção mais lucrativa, ou seja, a fábrica deve produzir cerca de 30 vasos por semana para obter o lucro máximo. No entanto, não deve produzir potes visto que a sua produção não traz lucro à fábrica. Chegamos à conclusão de que para obter o lucro máximo a fábrica deve produzir 30 vasos e nenhum pote. No entanto, a fábrica pode não concordar com este resultado porque não há a produção de potes. Assim, teriam de se estabelecer novas restrições. A solução deste problema acaba por estar dependente dos critérios da fábrica.

6. A Matemática financeira

Numa linguagem simples, Matemática Financeira é o ramo da Matemática que tem como objetivo o estudo do comportamento do dinheiro ao longo do tempo (juro e inflação) e como isso é aplicado a empréstimos, investimentos e avaliação financeira de projetos. As ferramentas de Matemática financeira são essenciais para compreender o mundo financeiro e tudo o que o envolve. Tem importância para a tomada de decisões nas empresas e, quando bem desenvolvida, a sua aplicação traz maior rentabilidade, possibilitando o processo de maximização nos resultados.

A Matemática Financeira também é aplicada em diversas situações cotidianas, como no cálculo das prestações de um financiamento de um móvel ou imóvel, na realizações de empréstimos, compras a crédito ou com cartão de crédito, nas aplicações financeiras e nos investimentos em bolsas de valores. O estudo da Matemática financeira reveste-se de grande importância para qualquer pessoa que quer entender o mundo atual.

As principais variáveis envolvidas no processo são a taxa de juro, o capital e o tempo. Ao realizarmos um empréstimo a forma de pagamento é feita através de prestações mensais acrescidas de juros, isto é, o valor de quitação do empréstimo é superior ao valor inicial do empréstimo. A essa diferença damos o nome de juros. Os juros podem ser capitalizados segundo dois regimes: simples ou compostos.

Juro simples de cada intervalo de tempo sempre é calculado sobre o capital inicial emprestado ou aplicado. Sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros. Valor Principal ou simplesmente principal é o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros.

Juro composto de cada intervalo de tempo é calculado a partir do saldo no início de correspondente intervalo. Nos juros compostos o montante dos juros é automaticamente acrescentado ao capital inicial.

O regime de juros simples está normalmente associado a operações financeiras de curto prazo. Por exemplo:

— Qual é o juro produzido por um capital de 3500€, investido a taxa de 7% ao ano no período entre 9 de Abril e 21 de Junho?

Tendo em conta que o período em questão corresponde a 72 dias, o juro será

$$J_1 = \frac{3500 \times 0{,}07}{365} \times 72 = 48{,}33\,€$$

Se o mesmo capital for investido durante 10 meses à mesma taxa, o juro será

$$J_2 = \frac{3500 \times 0,07}{12} \times 10 = 204,2\,€$$

Genericamente, se um capital c é investido durante n dias a uma taxa anual i, o juro será

$J = \frac{c \times i}{365} \times n$. Se o investimento for por n meses, o juro será $J = \frac{c \times i}{12} \times n$.

A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza juros compostos em compras a médio e longo prazo, compras com cartão de crédito, empréstimos bancários, as aplicações, etc.

Imaginemos que vamos a um banco e depositamos 1000 euros numa conta que rende 4% por ano.

Se esta percentagem for sempre sobre o valor inicial, cada ano que passa, o banco deposita 40 euros na conta. No final de 10 anos o dinheiro da conta passou para 1400 euros. Mas, se a percentagem incidir sobre o valor que existe na conta, cada ano que passa, a percentagem vai incidindo sobre um valor cada vez maior e o dinheiro assim cresce mais depressa. Quanto mais dinheiro houver na conta, mais depressa ele cresce.
Genericamente, suponhamos que um capital c é depositado numa instituição bancária com um taxa de juro anual i que se supõe composta anualmente. Qual será o capital ao fim de n anos?

Ao fim de um ano, o capital será $c_1 = c + c \times i$. Ao fim do segundo ano o capital será $c_2 = c_1 + c_1 \times i = c + c \times i + i \times (c + c \times i) = c \times (1 + i) + i \times c \times (1 + i) = c \times (1+ i)^2$
Ao fim de n anos o capital será $c_n = c \times (1+ i)^n$.

Retomando a situação anterior e supondo que ao longo de 10 anos o juro é composto anualmente, em vez de 1400 euros o capital seria:
$\mathbf{c_{10}} =$ $1000 \times (1+ 0,04)^{10} \approx 1000 \times 1,48 = 1480$ euros

Se, em vez de os juros serem depositados uma vez por ano forem duas, o dinheiro vai crescer ainda mais depressa.

Supondo que os juros são depositados de seis em seis meses (assim a taxa passa a ser de 2%), ao fim de 10 anos vamos ter $1000 \times (1 + 0,02)^{20}$, ou seja, aproximadamente 1486 euros.

Portanto, quantos mais vezes forem depositados os juros na conta, mais depressa cresce o dinheiro. Se o juro for composto n vezes por ano e fizermos n tender para infinito, o que equivale a uma composição continuada do juro, o capital passa a ser

$$C = \lim\left(1000\times\left(1+\frac{0{,}04}{n}\right)^{10n}\right) = 1000\times\lim\left(\left(1+\frac{0{,}04}{n}\right)^{n}\right)^{10} = 1000\times e^{10\times 0{,}04} \approx 1492\,€$$

As situações envolvendo juros simples podem ser abordadas a partir do 2º ciclo do ensino básico. Já as situações relativas a juros compostos destinam-se ao ensino secundário.

7. A Matemática e a Economia

A Economia é a área de conhecimento humano que tem como objeto de estudo as formas de produção e distribuição dos bens e serviços na sociedade. A Matemática tem sua aplicação no desenvolvimento de modelos econômicos e a utilização destes modelos matemáticos na Economia são fundamentais.

Uma importante aplicação da Matemática está presente na Economia através das funções custo, receita e lucro.

A função custo está relacionada aos gastos efetuados por uma empresa, indústria, loja, na produção ou aquisição de algum produto. O custo pode possuir duas partes: uma fixa e outra variável. Podemos representar uma função custo usando a seguinte expressão: $C(x) = Cf + Cv$, onde Cf - custo fixo e Cv - custo variável.

A função receita está ligada ao facturamento bruto de uma entidade, dependendo do número de vendas de determinado produto. $R(x) = p \times x$, onde p - preço de mercado e x- nº de mercadorias vendidas.

A função lucro diz respeito ao lucro líquido das empresas, lucro é igual a subtração entre a função receita e a função custo. $L(x) = R(x) – C(x)$.

Suponhamos que C (x) é função do custo total que uma companhia incorre na produção de x unidades de um certo produto. Se o número de itens produzidos estiver crescendo de
x_1 para x_2, o custo adicional será $\Delta C = C((x_2) - C(x_1)$, e a taxa média de variação do custo será:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C((x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

O limite da grandeza $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ é a taxa de variação instantânea de variação do custo em relação ao número de itens produzidos, quando $\Delta x \to 0$, chama-se custo marginal:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

Fazendo $\Delta x=1$ e n muito grande (Δx é pequeno comparado com n), como $C'(n)$ é restrição de $C'(n)$ a N, temos $C'(n) \approx C(n+1)-C(n)$.

Assim, o custo marginal de produção de n unidades é aproximadamente igual ao custo da produção de mais uma unidade.

Em geral é apropriado representar uma função custo por um polinómio: $C(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, onde a representa os custos gerais indiretos (aluguel, aquecimento, os outros termos representam o custo das matérias-primas, da mão-de-obra ets.)

Vamos analisar alguns exemplos, que podemos resolver com os alunos do ensino secundário.

— Numa fábrica de pistões (o pistão de um motor é uma peça cilíndrica feita de alumínio, que se move no interior do cilindro dos motores) para montadoras de motores automotivos (um motor converte outras formas de energia em energia mecânica, de forma a impelir movimento o veículo) tem o custo fixo mensal de 850€, que inclui conta de energia elétrica, de água, impostos, salários e etc. Existe também um custo variável que depende da quantidade de pistões produzidos, sendo a unidade 40€.

a) Considerando que o valor de cada pistão no mercado seja equivalente a 120€, montar as funções custo, receita e lucro.

b) Calcular o valor do lucro líquido na venda de 1000 pistões e quantas peças, no mínimo, precisam ser vendidas para que se tenha lucro.

a) Função Custo total mensal:
$C(x) = 850 + 40 \times x$

Função Receita:
$R(x) = 120 \times x$

Função Lucro:
$L(x) = 120 \times x - (850 + 40x)$

b) Lucro líquido na produção de 1000 pistões
$L(1000) = 120 \times 1000 - (850 + 40 \times 1000)$
$L(1000) = 120000 - (850 + 40000)$
$L(1000) = 120000 - 850 - 40000$
$L(1000) = 120000 - 40850$
$L(1000) = 79150$

O lucro líquido na produção de 1000 pistões será de 79150€.
Para que se tenha lucro é preciso que a receita seja maior que o custo.
$R(x) > C(x)$
$120 \times x > 850 + 40 \times x$
$120 \times x - 40 \times x > 850$

$80 \times x > 850$

$x > \frac{850}{80}$

$x > 10{,}625$

Assim, para ter lucro é preciso vender acima de 10 peças.

— Suponhamos que o custo, em euros, para uma companhia produzir x novas linhas de jeans é $C(x) = 2000+3x+0{,}01x^2+0{,}0002x^3$.

a) Encontrar a função custo marginal.

b) Encontrar C´ (100) e explicar seu resultado. O que ele prediz?

c) Comparar C´ (100) com o custo de manufaturar os 101 primeiros jeans.

a) A função do custo marginal:
$C'(x) = 3 + 0{,}02x + 0{,}0006x^2$

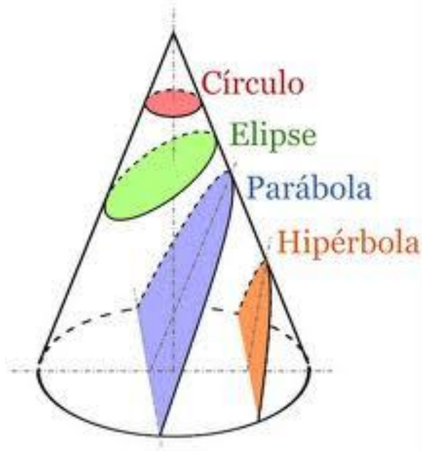
b) $C'(100) = 3+0{,}02 \times 100 + 0{,}0006 \times 100^2 = 3+2+6 = 11$€. Isto é o custo marginal no nível de produção de 100 linhas de jeans, que dá a taxa segundo a qual os custos estão crescendo em relação ao nível quando x=100 e prediz o custo dos 101 linhas de jeans.

c) O custo real da produção dos 101 primeiros jeans é
$C(101) - C(100) = 2000 + 3 \times 101+0{,}01 \times 101^2 + 0{,}0002 \times 101^3 - (2000+3 \times 100 + 0{,}01 \times 100^2 + 0{,}0002 \times 100^3) = 11{,}0702$
Notamos que $C'(100) \approx C(101) - C(100)$.

8. As cónicas e as quádricas

Dá-se o nome de cónica a qualquer linha obtida por interseção de uma superfície cónica por um plano.

- Obtém-se uma elipse ao cortando uma superfície cónica por um plano que não é paralelo a nenhuma geratriz.
- Obtém-se uma parábola cortando uma superfície cónica por um plano paralelo a uma geratriz.
- Obtém-se uma hipérbole cortando uma superfície cónica por um plano paralelo a duas geratrizes.



As cónicas desempenham um papel importante em vários domínios da física, da economia, da engenharia, da arquitetura e em muitas outras situações.

Provavelmente pela primeira vez, as cónicas foram estudadas, cerca de 340 a.C., pelo geómetra grego Menaecmus, com o fim de resolver o problema da duplicação do cubo.

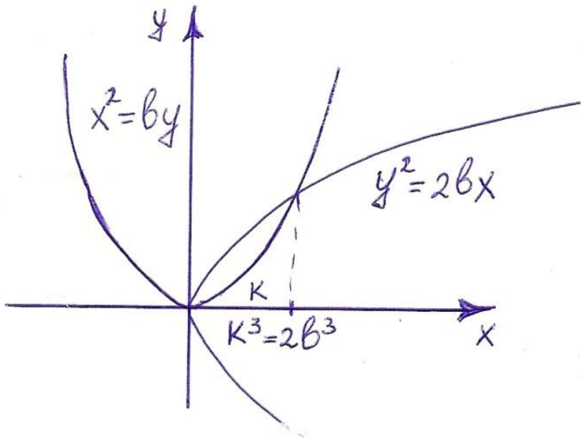
A duplicação do cubo é um dos "três problemas clássicos"da antiguidade. Consiste em, conhecida a aresta de um cubo, construir com uma régua não graduada e um compasso a aresta de um outro cubo com o dobro de volume do inicial. Teve origem na Grécia Antiga e é também conhecido por "problema de Delos"'. Diz a lenda que uma delegação da cidade de Atenas deslocou-se ao oráculo em Delos para perguntar como poderia ser combatida a peste que dizimava a cidade. O oráculo respondeu, que o altar de Apolo, que tinha forma cúbica, deveria ser duplicado.

Designando por b a medida da aresta do cubo inicial e usando a geometria analítica permite associar números a pontos e equações a conjuntos de pontos – a medida k da aresta do cubo com o dobro do volume pode ser obtida como abscisa do ponto da interseção das parábolas das equações $x^2 = by$, $y^2 = 2bx$.

Se $x^2 = by$, tem se que $y = \frac{x^2}{b}$, pelo que $y^2 = \frac{x^4}{b^2}$. Como $y^2 = 2bx$, resulta que

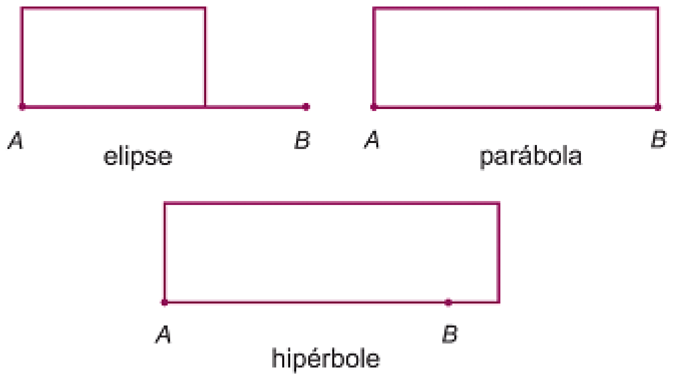
$\frac{x^4}{b^2} = 2bx$, e assim $x^3 = 2b^3$.

Fazendo $x = k$ tem se $k^3 = 2b^3$, isto é, a cubo cuja aresta mede k tem dobro do volume do cubo inicial.



Note-se que Menaecmus não resolveu o problema da duplicação do cubo tal como foi enunciado, isto é, com recurso apenas a régua não graduada e compasso. Recorreu a curvas que não se podem construir com estas ferramentas. Sabe-se hoje que, com essa condicionante, o problema não tem solução.

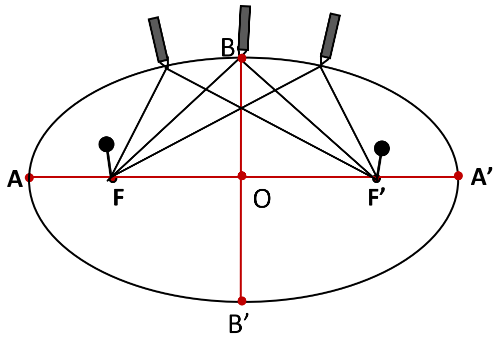
Apolónio de Pergamo (262 a.C.-190 a.C.) atribuiu às cónicas os nomes, elipse, parábola e hipérbole, tirando-os de uma terminologia pitagórica. Quando os pitagóricos faziam a base de um retângulo ficar sobre um segmento retilíneo de modo que uma extremidade dessa base coincidisse com uma das extremidades do segmento, diziam que tinham um caso de elipse, parábola ou hipérbole, conforme a referida base fosse menor do que o segmento, com ele coincidisse ou no excedesse. A elipse quer dizer falta, parábola corresponde a igual e hipérbole exprime excesso.



Deve-se aos geómetras gregos a descoberta das propriedades focais da elipse, da parábola e da hipérbole, de que nos servimos para as definir geometricamente.

Elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a soma das distâncias a dois pontos fixos, os focos da elipse, é uma constante maior do que a distância entre os focos.

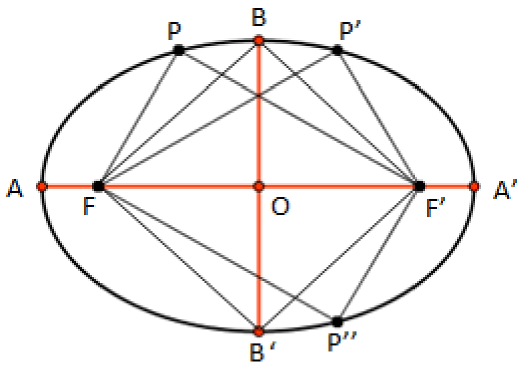
O método usado pelos jardineiros para o traçado de canteiros elíticos não é mais do que a concretização mecânica da definição anterior. Basta marcar fixar em dois pontos, os focos, as extremidades de um fio com comprimento superior à distância entre eles, e fazer deslizar sobre o plano a ponta de um lápis de modo a manter o fio esticado. Nestas condições, todos os pontos sobre o traçado contínuo obtido gozam da característica enunciada na definição.



Sejam A e A´ os pontos de interseção da elipse com a reta definida pelos focos F e F´ e O o ponto médio do segmento FF´. Sejam B e B´ os pontos de interseção da elipse com a reta que passa pelo ponto O e é perpendicular ao segmento de reta AA´.

No âmbito do ensino secundário, e antes de qualquer outro desenvolvimento, podem ser exploradas em sala de aula as características geométricas desta curva, recorrendo ao traçado anterior ou a uma simulação usando, por exemplo, um programa de geometria dinâmica.

— Justifique que a elipse é uma curva simétrica relativamente aos segmentos AA´ e BB´ e o ponto O é o centro de simetria.



As simetrias relativamente a AA´ e BB´ decorrem facilmente da caracterização da elipse como lugar geométrico.

Por exemplo, se P´ é simétrico de P em relação a BB´ e sendo F e F´ simétricos relativamente ao ponto O, os segmentos de reta F´P´ e FP´ resultam, respetivamente, de uma reflexão na reta BB´ dos segmentos de reta FP e F´P. Então $\overline{F'P'} = \overline{FP}$ e $\overline{FP'} = \overline{F'P}$, pelo que $\overline{F'P'} + \overline{FP'} = \overline{F'P} + \overline{FP}$, resultando que P´ é também ponto da elipse.

No que respeita aos pontos A´ e B´ que são, por definição, pontos da elipse, para verificar que são os simétricos de A e B em relação a BB´ e AA´, respetivamente, basta ter em conta que:

- $\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{A'F} + \overline{A'F'}$, $\overline{AF'} = \overline{AF} + \overline{FF'}$ e $\overline{A'F} = \overline{A'F'} + \overline{FF'}$, pelo que $\overline{AF} + \overline{AF} + \overline{FF'} = \overline{A'F'} + \overline{FF'} + \overline{A'F'}$ e assim $\overline{AF} = \overline{A'F'}$;

- Sendo F e F´ simétricos em relação a O e o segmento de reta BB´ perpendicular a FF´, os triângulos FBF´ e FB´F´ são isósceles e têm base comum, pelo que $\overline{BF} = \overline{BF'}$ e $\overline{B'F} = \overline{B'F'}$. Resta observar que, como $\overline{BF} + \overline{BF'} = \overline{B'F} + \overline{B'F'}$ tem-se que $\overline{BF} = \overline{B'F}$ e $\overline{B'F'} = \overline{B'F'}$, pelo que os triângulos FBF´ e FB´F´ são iguais (logo, $\overline{BO} = \overline{B'O}$).

Aos segmentos AA´ e BB´ chamam-se, respetivamente, eixo maior e eixo menor da elipse.

As relações entre o valor da constante que quantifica a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos focos, os comprimentos dos eixos da elipse e a distância focal, são importantes para o estudo analítico desta curva e podem ser facilmente deduzidas na sala de aula.

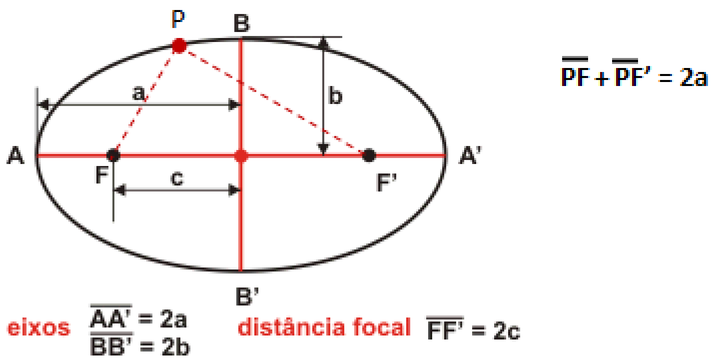
— Verificar que uma elipse em que a distância focal é igual a 2c e a soma das distâncias de qualquer um dos seus pontos aos focos é igual a 2a tem eixo maior com comprimento 2a e eixo menor com comprimento 2b em que $b^2 = a^2 - c^2$.

Como $\overline{BO} = b$, $\overline{FB} = a$, e $\overline{FO} = c$ tem-se, pelo teorema de Pitágoras, $b^2 = a^2 - c^2$.

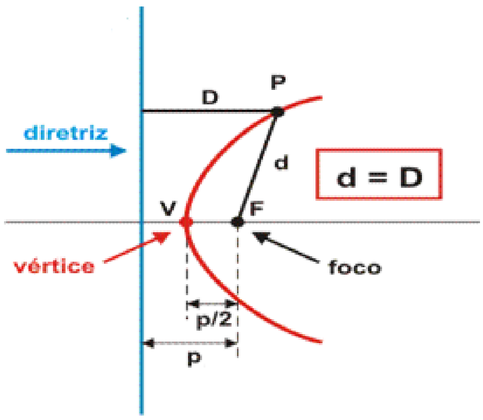
Verifiquemos que o segmento de reta AA´ tem comprimento 2a:

Sendo A um ponto da elipse, tem-se que $\overline{AF}+\overline{AF'}=2a$. Como $\overline{AF'}=\overline{AF}+\overline{FF'}$ e $\overline{FF'}=2c$, resulta que $\overline{AF}+\overline{AF'}=\overline{AF}+\overline{AF}+2c=2a$ pelo que $\overline{AF}=a-c$ e $\overline{AO}=(a-c)+c=a$. Como A e A´ são simétricos relativamente a BB´ tem-se que $\overline{AA'}=2a$.

Resumindo,

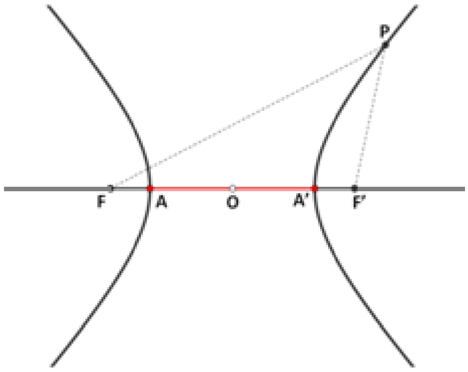


Parábola é o lugar geométrico dos pontos P do plano que equidistam de um ponto fixo, o foco, e de uma reta fixa, a diretriz.



Se considerarmos a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz, o vértice V da parábola é o ponto da interseção desta reta com a parábola e decorre da definição que a distância de V à diretriz é metade da distância do foco à diretriz (uma vez que a distância de V a F é igual à distância de V à diretriz). Também resulta da definição que a parábola é simétrica relativamente à reta que passa pelo vértice, foco e é perpendicular à diretriz.

Hipérbole é o lugar geométrico dos P de um plano, tais que o módulo da diferença das distâncias de P a dois pontos fixos do plano, os focos da hipérbole, é uma constante menor do que a distância entre os focos.



Aos pontos A e A´ de interseção da hipérbole com a reta que passa pelos seus focos chamam-se vértices da hipérbole e decorre facilmente da definição desta curva que ela é simétrica em relação a esta reta.

As relações entre o valor da constante que quantifica o valor absoluto da diferença das distâncias de qualquer ponto da hipérbole aos focos, a distância focal e a distância entre os vértices, podem ser deduzidas na sala de aula e são importantes para o estudo analítico desta curva.

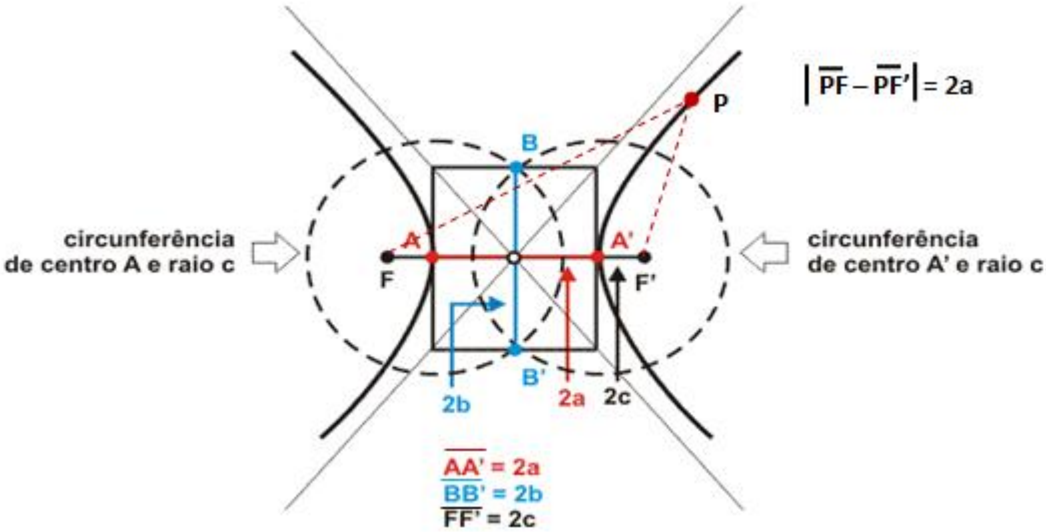
— Verificar que numa hipérbole o valor absoluto da diferença das distâncias de qualquer um dos seus pontos aos focos é igual à distância entre os seus vértices.

Seja 2a o valor absoluto da diferença das distâncias de qualquer um dos pontos da hipérbole aos focos e seja 2c a distância focal.

Sendo A e A´ pontos da hipérbole tem-se $\overline{AF'} - \overline{FA} = 2a$ e $\overline{FA'} - \overline{A'F'} = 2a$. Por outro lado, $\overline{AF'} = 2c - \overline{FA}$ e $\overline{FA'} = 2c - \overline{A'F'}$. Então $2c - \overline{FA} - \overline{FA} = 2c - \overline{A'F'} - \overline{A'F'} = 2a$, pelo que $\overline{FA} = \overline{A'F'} = c - a$ e, consequentemente, $\overline{AA'} = 2c - 2(c - a) = 2a$.

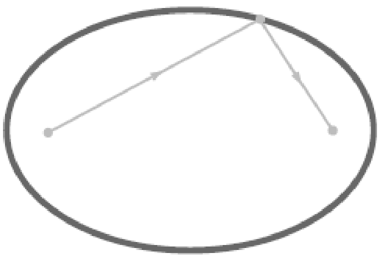
Com centro nos vértices da hipérbole e raio igual a metade da distância focal tracem-se duas circunferências como se ilustra na figura seguinte e sejam B e B´ os pontos de interseção dessas circunferências.

Ao segmento de reta BB´ chama-se eixo transverso da hipérbole.



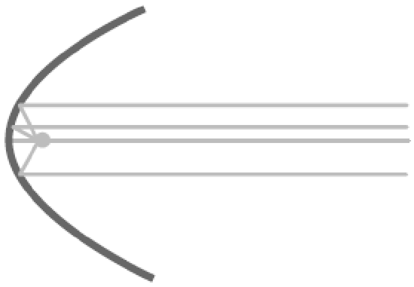
As cónicas possuem propriedades refletoras. Estas propriedades são responsáveis pelas suas aplicações mais conhecidas, assim como das superfícies de revolução que lhes estão associadas, **elipsoides**, **paraboloides** e **hiperboloides** de uma e duas folhas.

- Numa **elipse,** qualquer raio emitido a partir de um foco reflete-se passando pelo outro foco.



A propriedade refletora da elipse é utilizada para a obtenção de boas condições acústicas, nomeadamente nas salas de espetáculo. A sala do Teatro Nacional de S. Carlos tem forma elíptica e foi concebida de modo a que os respetivos focos se situem na frente do palco e no lugar do rei.

- Numa **parábola**, qualquer raio paralelo ao seu eixo reflete-se passando pelo foco, e qualquer raio emitido do foco reflete-se paralelamente ao eixo.

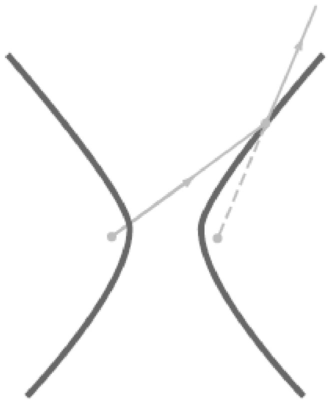


Porque é que as antenas que captam sinais do espaço são parabólicas? Por que os espelhos dos telescópios astronômicos são parabólicos?

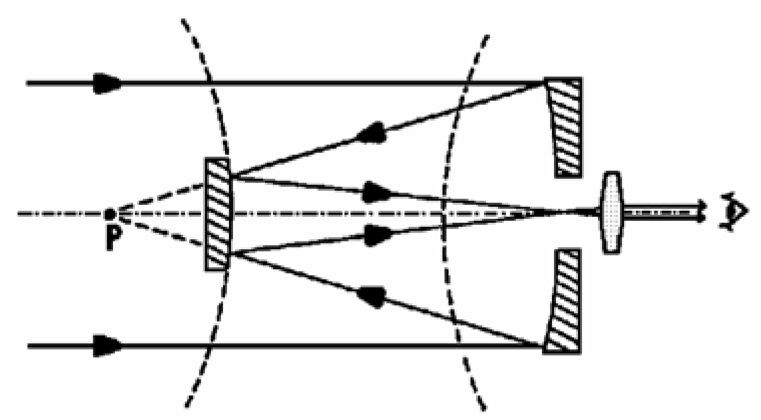
Os sinais que recebemos das ondas de rádio ou luz são muito fracos. Por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. A superfície da antena ou do espelho deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão. Se a superfície for parabólica, todos os sinais recebidos no foco.

Os faróis dos automóveis e das motocicletas são aplicações óticas da propriedade refletora da parábola: são paraboloides espelhados por dentro e em que se coloca a lâmpada no foco.

- Numa **hipérbole**, qualquer raio emitido a partir de um foco reflete-se de modo a que o seu prolongamento passe pelo outro foco.



Esta propriedade faz com que a hipérbole tenha várias aplicações práticas. Um exemplo de uma aplicação ótica é o chamado telescópio de reflexão. É constituído basicamente por dois espelhos, um maior, chamado primário, que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico. Os dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da primeira coincida com um dos da segunda.



http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/aplicacoes.pdf

Os raios de luz que se refletem no espelho parabólico são dirigidos para o seu foco, pela propriedade de reflexão da parábola. Como o foco da parábola também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta, os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole.

Um telescópio com estas características terá sido apresentado em 1672 por Cassegrain. Cerca de 1910 foi inventado o telescópio de Ritchey – Chrétien que substituiu o espelho primário parabólico por um espelho hiperbólico com o objetivo de eliminar os erros óticos. O telescópio Hubble, em órbita deste 1990, tem o design Ritchey – Chrétien.

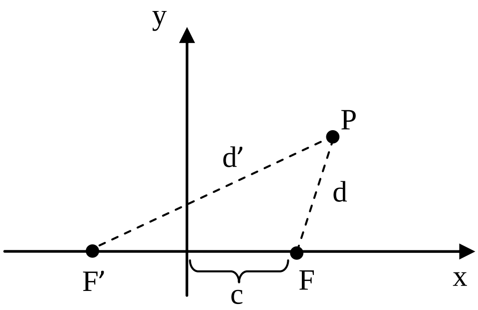
As aplicações modernas das cónicas surgiram no seculo XVII com trabalhos de Descartes, Kepler e Galileu. Descartes aprofundou o fato de todas as cónicas serem imagem em perspetiva de uma circunferência. Kepler enunciou em 1609 a lei das orbitas elípticas e Galileu mostrou que a trajetória de um projétil lançando obliquamente de baixo para cima é proximamente a uma parábola. Galileu demonstrou que os cabos de uma ponte de suspensão assumem a forma de uma parábola. Nas pontes verifica-se que arcos invertidos, suportando cargas igualmente distribuídas, têm a forma de parábola.

Com René Descartes e Pierre de Fermat surgiu o método da geometria analítica. Essencialmente, este método consiste em definir a posição de cada ponto por meio de um sistema de números, dois no caso da geometria plana e três no caso da geometria no espaço, o que permite traduzir a linguagem da geometria em linguagem da análise. Assim, as figuras geométricas passam a ser descritas por meio de equações e inequações, os problemas da geometria transformam-se em problemas de álgebra e os teoremas da geometria podem ser demonstrados por meio da análise. Reciprocamente, a análise pode ser interpretada em termos geométricos. Com a criação do método da Geometria Analítica estabeleceu-se uma aliança da Geometria com a Álgebra que promove um enorme benefício para a matemática e ciências afins.

No âmbito do ensino secundário é adequado deduzir as equações das cónicas a partir da sua definição geométrica:

— Verificar que uma elipse em que a distância focal é igual a 2c e a soma das distâncias de qualquer um dos seus pontos aos focos é igual a 2a é descrita pela equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ em que $b^2=a^2-c^2$.

Tomem-se para eixo dos x a reta que passa pelos focos F e F´ e por eixo dos y a reta que lhe é perpendicular passando pelo ponto médio do segmento de reta com extremos F e F´.



Sendo a soma das distâncias d e d´ de um ponto P (x, y) sobre a elipse aos pontos F (*c*, 0) e F´(-c, o) igual a 2a, tem-se

$d=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $d'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ e $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$.

Então $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, pelo que

$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Simplificando, obtém-se $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$, pelo que

$a^2\left(x^2+c^2-2cx+y^2\right)=a^4+c^2x^2-2a^2cx$.

Simplificando novamente, vem $a^2x^2+a^2c^2-2a^2cx+a^2y^2=a^4+c^2x^2-2a^2c$,

$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$,

$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

Como $a>c$, tem-se $a^2-c^2>0$. Então, se pusermos $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $b^2=a^2-c^2$

$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Dividindo ambos os membros por a^2b^2 obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

E reciprocamente,

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \; y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \; y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$d' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2a^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + b^2a^2 - b^2x^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{x^2a^2 + 2a^2cx + a^2(a^2 - b^2) + b^2a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)x^2 + 2a^2cx + a^4} = \frac{1}{a}\left|cx + a^2\right| =$$

$$\left|\frac{c}{a}x + a\right| = \frac{c}{a}x + a.$$

Analogamente,

$$d = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = a - \frac{c}{a}x$$

e assim,

$$d + d' = a - \frac{c}{a}x + a + \frac{c}{a}x = 2a.$$

Os pontos da interseção da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ com os eixos coordenados:

se x= 0, $\frac{y^2}{b^2} = 1, y^2 = b^2, \; y = \pm b$,

se y = 0, $\frac{x^2}{a^2} = 1, \; x^2 = a^2$, $x = \pm\, a$.

Na equação $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$,

se *x* = 0, $\sqrt{(-c)^2 + y^2} + \sqrt{c^2 + y^2} = 2a$,

$2\sqrt{c^2 + y^2} = 2a, \; c^2 + y^2 = a^2, \; y^2 = c^2 - a^2 = b^2, \; y = \pm b.$

se y = 0, $\sqrt{(x-c)^2} + \sqrt{(x+c)^2} = 2a$,

$|x-c| + |x+c| = 2a$, $x = \pm a$.

Assim, a solução de $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ é também a solução de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Então, uma elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $b^2 = a^2 - c^2$, em que a distância focal é igual a 2c e a soma das distâncias de qualquer um dos seus pontos aos focos é igual a 2a. Tem-se ainda que a e b são os semieixos da elipse.

Genericamente, demonstrou-se que as cónicas (que podem em particular ser degeneradas) podem ser expressas por equações do segundo grau nas variáveis x e y,

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

e, reciprocamente, todas a equação deste tipo representa uma cónica.

O tipo de cónica depende do valor de B^2-4AC:

Elipses	B^2-4AC < 0
Parábolas	B^2-4AC = 0
Hipérboles	B^2-4AC > 0

Verifiquemos que as cónicas podem ser expressas por equações do segundo grau nas variáveis x e y,

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Consideremos a equação de uma elipse centrada na origem, com semieixos a e b, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Esta equação pode escrever-se na forma $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ com $A= b^2$, B = 0, $C = a^2$, D = E = 0 e $F = - a^2b^2$. Tem-se que $B^2 – 4AC = - 4b^2a^2 < 0$.

A equação de uma hipérbole centrada na origem, com semieixos a e b, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Esta equação pode escrever-se na forma $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ com $A= b^2$, B = 0, $C = -a^2$,

$D = E = 0$ e $F = - a^2b^2$. Tem-se que $B^2 – 4AC = 4b^2a^2 > 0$.

A equação de uma parábola com vértice na origem, $x^2 = 2 \times p \times y$ ou $y^2 = 2 \times p \times x$,

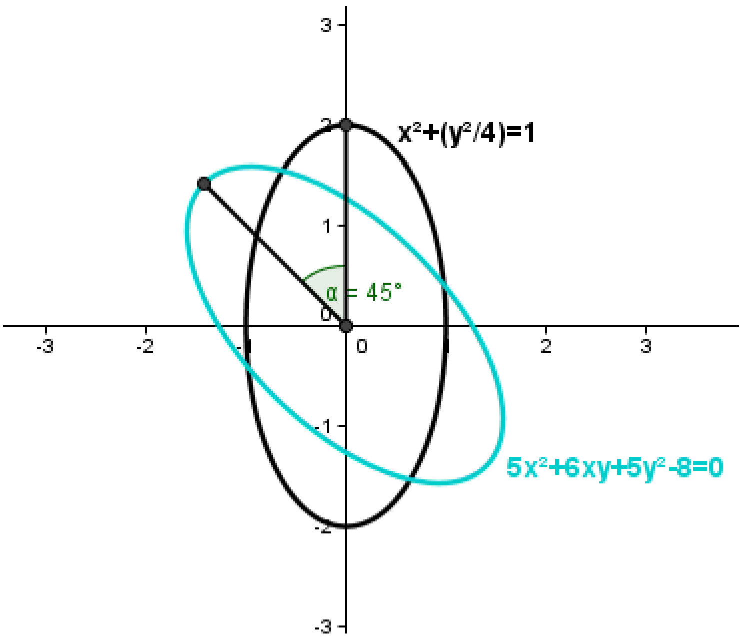
onde $\frac{p}{2}$ é a distancia entre a origem e o foco ou p é a distancia entre a diretriz e o foco.
Esta equação pode escrever-se na forma $Ax^2 + Ey = 0$ com A=1, B = 0, C = 0, D = 0, E= $-2 \times p$ e F = 0 ou $Cy^2 + Dx = 0$ com A= 0, B = 0, C = 1, D= $-2 \times p$, E = 0 e F = 0.
Tem-se que $B^2 – 4AC = 0$.

Analisemos o recíproco do resultado anterior no caso da elipse, começando com um exemplo.

— Verificar que a curva de equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 – 8 = 0$ representa uma elipse que resulta de uma rotação de 45º em torno da origem da elipse centrada na origem e com semieixos a=1 e b=2.

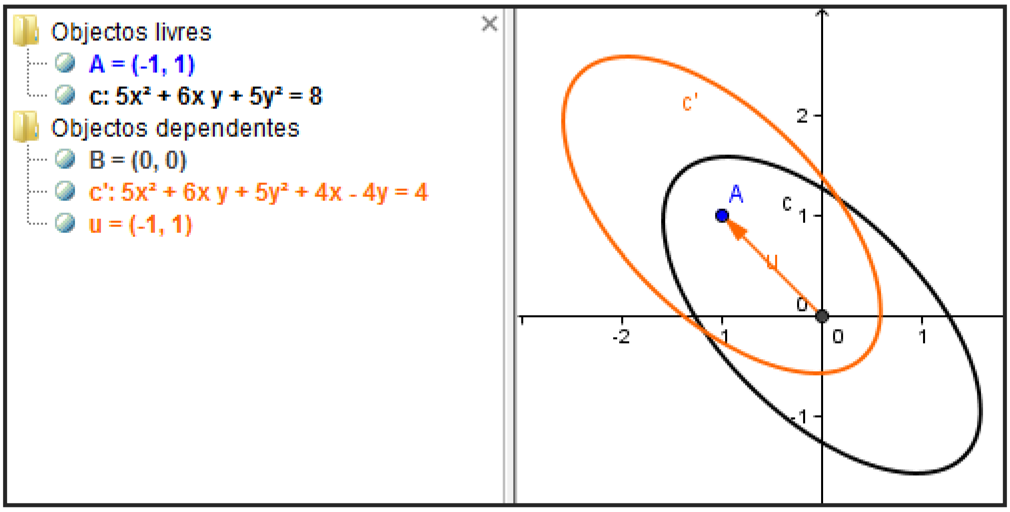
Tem-se neste caso que A=5, B=6 e C=5, B^2-4AC = 36 – 100 < 0 e, pelo teorema anterior, a equação representa uma elipse.

Geometricamente,



Se efetuarmos uma translação da elipse de equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 – 8 = 0$ o seu centro deixa de coincidir com a origem dos eixos coordenados e na equação da elipse transformada passam a figurar termos em x e y, como se observa na figura seguinte.

Deve ser realçado que estas experiências não se destinam a demonstrar nada, mas apenas a formular conjeturas.



Tomemos a equação geral de uma cónica $A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$. Para poder representar uma elipse centrada na origem, se P (u, v) é ponto sobre ela, o mesmo acontece com o seu simétrico em relação à origem P´ (-u, -v). Então,
$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = A'u^2 + B'uv + C'v^2 - D'u - E'v + F'$
pelo que $D'u + E'v = 0$ para qualquer ponto P(u, v) da elipse e, consequentemente, $D'=E'= 0$.

Além disso, se $B'= 0$, os eixos da elipse coincidem com os eixos coordenados.

Neste exemplo, $A'= 5$, $B'= 6$, $C'= 5$, $F'= - 8$. Fazemos uma rotação de 45º do elipse em torno da origem, que é caracterizada por:

$$x = x_0 \cos 45^o - y_0 \operatorname{sen} 45^o$$
$$y = x_0 \operatorname{sen} 45^o + y_0 \cos 45^o$$

Substituindo x e y na equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 – 8 = 0$, obtemos
$5(x_0 \cos 45^o - y_0 \operatorname{sen} 45^o)^2 + 6(x_0 \cos 45^o - y_0 \operatorname{sen} 45^o)(x_0 \operatorname{sen} 45^o + y_0 \cos 45^o) +$
$5(x_0 \operatorname{sen} 45^o + y_0 \cos 45^o)^2 - 8 = 0$.

Substituindo $\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e simplificando:

$$5(x_0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - y_0 \times \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 6(x_0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - y_0 \times \frac{\sqrt{2}}{2})(x_0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + y_0 \times \frac{\sqrt{2}}{2}) +$$
$$+5(x_0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + y_0 \times \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 8 = 0.$$

$$5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 - y_0)\right)^2 + 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 - y_0)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 + y_0)\right) + 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 + y_0)\right)^2 - 8 = 0$$

$$5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 - y_0)\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}(x_0{}^2 - y_0{}^2)\right) + 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 + y_0)\right)^2 - 8 = 0$$

$$\left(5\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 6\times\frac{1}{2} + 5\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)x_0{}^2 + \left(-\frac{5}{2}\times 2 + \frac{5}{2}\times 2\right)x_0 y_0 +$$

$$\left(5\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 6\times\frac{1}{2} + 5\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)y_0{}^2 - 8 = 0$$

Sejam,

$A = 5 \times \frac{1}{2} + 6\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{1}{2} = 8$

$B = -\frac{5}{2}\times 2 + \frac{5}{2}\times 2 = 0$

$C = 5 \times \frac{1}{2} - 6\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{1}{2} = 2$

Obtemos uma equação da elipse centrada na origem $8\,x_0{}^2 + 2\,y_0{}^2 = 8$ ou dividindo por 8:

$$\frac{x_0{}^2}{1} + \frac{y_0{}^2}{4} = 1 \text{ ou } \frac{x_0{}^2}{1^2} + \frac{y_0{}^2}{2^2} = 1$$

Concluímos, que $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ representa uma elipse que resulta de uma rotação de 45º em torno da origem da elipse centrada na origem e com semieixos a=1 e b=2.

Caracterizemos analiticamente as transformações geométricas que transformam a elipse $A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$ numa curva cujos eixos de simetria coincidem com os eixos coordenados.

Eliminamos os termos do primeiro grau em x e y por meio de uma translação que faça coincidir o centro da elipse com a origem dos eixos coordenados. Com efeito, fazendo $x = u + h$ e $y = v + k$ na equação geral da elipse, obtém-se

$$A'(u+h)^2 + B'(u+h)(v+k) + C'(v+k)^2 + D'(u+h) + E'(v+k) + F' = 0$$

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + (2A'h + B'k + D')u + (B'h + 2C'k + E')v +$$

$$(2h^2 + B'hk + C'k^2 + D'h + E'k + F') = 0$$

Determinemos h e k de modo a eliminar os termos de primeiro grau em u e v:

$$\begin{cases} 2A'h + B'k + D' = 0 \\ B'h + 2C'k + E' = 0 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema por método da substituição, substituindo $k = \frac{-2A'h - D'}{B'}$ na segunda equação do sistema:

$$B'h + 2C' \times \frac{-2A'h - D'}{B'} + E' = 0 \Leftrightarrow$$

$$B'h + \frac{-4A'C'h}{B'} - \frac{2C'D'}{B'} + \frac{B'E'}{B'} = 0 \Leftrightarrow$$

$$h(B' - \frac{4A'C'}{B'}) = \frac{2C'D' - B'E'}{B'} \Leftrightarrow$$

$$h = \frac{2C'D' - B'E'}{B'} \div (B' - \frac{4A'C'}{B'}) \Leftrightarrow$$

$$h = \frac{2C'D' - B'E'}{B'} \div \frac{B'^2 - 4A'C'}{B'} \Leftrightarrow$$

$$h = \frac{2C'D' - B'E'}{B'^2 - 4A'C'}$$

$$k = \frac{-2A' \times \frac{2C'D' - B'E'}{B'^2 - 4A'C'} - D'}{B'} = \frac{-4A'C'D' + 2A'B'E' - D'(B'^2 - 4A'C')}{B'(B'^2 - 4A'C')} =$$

$$= \frac{-4A'C'D' + 2A'B'E' - D'B'^2 + 4A'C'D'}{B'(B'^2 - 4A'C')} = \frac{B'(2A'E' - D'B')}{B'(B'^2 - 4A'C')} = \frac{2A'E' - D'B'}{B'^2 - 4A'C'}$$

Como nos variáveis h e k $B'^2 - 4A'C'$ está no denominador, então tem ser diferente do zero: $B'^2 - 4A'C' \neq 0$.

Tomando F = $2h^2 + B'hk + C'k^2 + D'h + E'k + F'$ vamos obter a equação da elipse centrada na origem,
$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + F = 0$.

Para levar os eixos a coincidir com os eixos coordenados, o que equivale a eliminar o termo em uv, deve-se fazer uma rotação de um ângulo θ. Verifiquemos que θ é tal que
$\tan 2\theta = \frac{B'}{A' - C'}$.

Essa rotação é caracterizada por:

$u = u_0 \cos\theta - v_0 \operatorname{sen}\theta$

$v = u_0 \operatorname{sen}\theta + v_0 \cos\theta$

Substituindo u e v na equação $A' u^2 + B' uv + C' v^2 + F = 0$ obtemos

$$A' (u_0 \cos\theta - v_0 \operatorname{sen}\theta)^2 + B' (u_0 \cos\theta - v_0 \operatorname{sen}\theta)(u_0 \operatorname{sen}\theta + v_0 \cos\theta) +$$
$$C' (u_0 \operatorname{sen}\theta + v_0 \cos\theta)^2 + F = 0.$$

Desembaraçando de parênteses e simplificando:

$$(A' \cos^2\theta + B' \operatorname{sen}\theta + C' \operatorname{sen}^2\theta) u_0^{\,2} + ((-2A' - 2C') \operatorname{sen}\theta \cos\theta + B'(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)) u_0 v_0 +$$
$$(A' \operatorname{sen}^2\theta - B' \operatorname{sen}\theta \cos\theta + C' \cos^2\theta) v_0^{\,2} + F' = 0$$

Sejam,

$A = A' \cos^2\theta + B' \operatorname{sen}\theta + C' \operatorname{sen}^2\theta$

$B = (-2A' - 2C') \operatorname{sen}\theta \cos\theta + B'(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = -(A' - C') \operatorname{sen}2\theta + B' \cos 2\theta$

$C = A' \operatorname{sen}^2\theta - B' \operatorname{sen}\theta \cos\theta + C' \cos^2\theta$

Se θ é tal que $\tan 2\theta = \dfrac{B'}{A' - C'}$ e $B = -(A' - C') \operatorname{sen}2\theta + B' \cos 2\theta$, temos que

$$A' - C' = \frac{B'}{\tan 2\theta}$$

e assim $B = -\left(\dfrac{B'}{\tan 2\theta}\right) \operatorname{sen}2\theta + B' \cos 2\theta = 0$

$$B = -\frac{B'}{\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\cos 2\theta}} \times \operatorname{sen}2\theta + B' \cos 2\theta = 0$$

$$B = -B' \cos 2\theta + B' \cos 2\theta = 0$$

Então, $A u_0^{\,2} + C v_0^{\,2} + F = 0$, onde A, C, F são diferentes do 0, como se pretendia.

A propósito das aplicações das propriedades refletoras das cónicas foram referidas as superfícies geradas pela rotação das cónicas em torno dos seus eixos, elipsoides, paraboloides e hiperboloides de uma e duas folhas.

Analiticamente, estas superfícies de revolução associadas às cónicas, são superfícies do 2º grau (ou quádricas) com a equação geral

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0.$$

Corresponde-lhes um pequeno número de formas, tipo cilindro, cone, elipsoide, hiperboloide, paraboloide, podendo todos as outras ser obtidas a partir destas por dilatações e contrações em diferentes direções.
De entre as quádricas, destacamos em seguida o hiperboloide de uma folha que, pelas suas características geométricas é usado na construção.

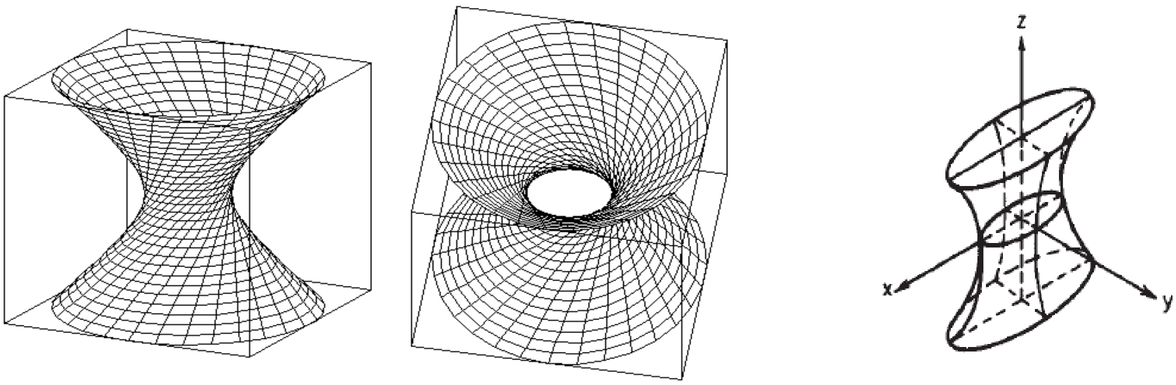
À semelhança do que se passa com as cónicas, através de transformações geométricas podem eliminar-se os termos mistos xy, xz e yz, obtendo a equação $Ax^2+By^2+Cz^2+Gx+Hy+Iz+J=0$.

Se G=H=I=0, a esta equação representa uma quádrica centrada na origem do sistema de coordenados e a sua equação toma a forma $Ax^2+By^2+Cz^2= -J$.

Se J=0 a superfície degenera na origem do sistema de coordenadas (0;0;0). Se J é diferente do 0, tomando $\frac{1}{a^2}=-\frac{A}{J};\frac{1}{b^2}=-\frac{B}{J};\frac{1}{c^2}=-\frac{C}{J}$ obtém-se assim, a quádrica dada por $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$.

Esta expressão é chamada forma canónica de uma superfície quádrica centrada. Conforme a variação dos sinais dos termos na expressão, esta superfície pode ser um elipsoide, um hiperboloide de uma folha ou um hiperboloide de duas folhas.

O hiperboloide de uma folha na direção do eixo z tem a equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.



Os traços nos planos xz e yz são hipérboles e o traço no plano xy é a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Se a= b o traço no plano xy é uma circunferência e o hiperboloide pode ser gerado pela rotação das hipérboles $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ou $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ em torno do eixo dos z.

O hiperboloide de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ é uma superfície de revolução, pelo que é denominada hiperboloide de revolução.

Hiperboloide de uma folha na direção do eixo y é dado por equação:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Os traços nos planos xy e yz são hipérboles e o traço no plano xz é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Se a=c o hiperboloide é chamado de hiperboloide de revolução de uma folha e pode ser gerado pela rotação das hipérboles: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ou $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ em torno do eixo y.

Hiperboloide de uma folha na direção do eixo x é dado por equação:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Os traços nos planos xy e xz são hipérboles e o traço no plano yz é a elipse:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Além disso, se b=c o hiperboloide é chamado de hiperboloide de revolução de uma folha e pode ser gerado pela rotação das hipérboles: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ou $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ em torno do eixo x.

Se o centro do hiperboloide de uma folha é ponto, através de translação de eixos, os termos $\frac{x^2}{a^2};\frac{y^2}{b^2};\frac{z^2}{c^2}$ são substituídos pelos termos $\frac{(x-x_0)^2}{a^2},\frac{(y-y_0)^2}{b^2},\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$.

Analisamos um exemplo da aplicação das quádricas, que pode ser resolvido com os alunos do ensino secundário [8r].

— Escrever a quádrica de equação $4x^2 - 16x - y^2 - 2y + 4z^2 - 16z + 27 = 0$ na forma canónica. Classificar a superfície em questão e indicar o seu centro.

Selecionamos os binómios quadrados com termos x, y, z:

$4x^2 - 16x = 4 ((x^2 - 4x + 4) – 4) = 4(x – 2)^2 -16$

$- y^2 - 2y = - ((y^2 + 2y + 1) - 1) = - (y^2 + 1)^2 +1$

$4z^2 -16z = 4 ((z^2 - 4z +4) – 4) = 4(z – 2)^2 -16$

Substituindo estas expressões na equação dada, obtém-se:

$4(x – 2)^2 - 16 – (y - 1)^2 + 1 + 4(z – 2)^2 -16 +27 = 0$

$4(x – 2)^2 – (y - 1)^2 + 4(z – 2)^2 = 4$, dividindo cada termo por 4 e simplificando, obtemos:

$$\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{1} = 1.$$

Portanto, trata-se de um hiperboloide de uma folha, de revolução em torno do eixo y=1.

O centro deste hiperboloide de uma folha é o ponto (2,1,2), que obtemos através de translação de eixos da origem.

Os traços nos planos z=2 e x=2 são hipérboles

$$\frac{(x-2)^2}{1^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1 \text{ e } -\frac{(y-2)^2}{2^2} + \frac{(z-2)^2}{1^2} = 1$$

e o traço no plano y=1 é uma circunferência centrada no ponto (2,1,2) com raio R=1:

$$\frac{(x-2)^2}{1^2} + \frac{(z-2)^2}{1^2} = 1 \Leftrightarrow (x – 2)^2 + (z – 2)^2 = 1.$$

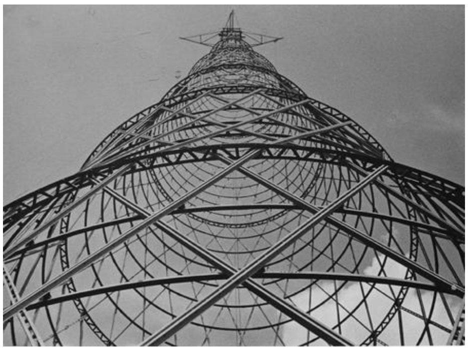
Como a = c = 1 o hiperboloide é chamado de hiperboloide de revolução de uma folha e pode ser gerado pela rotação das hipérboles: $\frac{(x-2)^2}{1^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$ ou $-\frac{(y-1)^2}{2^2} + \frac{(z-2)^2}{1^2} = 1$ em torno do y=1.

O hiperboloide de uma folha é usado na construção civil. Por exemplo, é utilizado em torres de resfriamento das centrais nucleares. O hiperboloide de uma folha possui a seguinte característica: em cada um de seus pontos há duas retas distintas que cruzam a superfície. Trata-se de uma superfície duplamente regrada. Esta propriedade, permite construir grandes estruturas no formato de hiperboloide de uma folha com vigas de aço retilíneas, minimizando assim os ventos cruzados, e mantendo a integridade estrutural com o uso mínimo de materiais de construção.

Torre de resfriamento

Torre de televisão de Cantão

O arquiteto e engenheiro russo Vladimir Shukhov ao fazer o design de formas utilizando o mínimo de materiais, tempo e trabalho, deduziu matematicamente que o hiperboloide de uma folha tem estas características. Estas superfícies são duplamente regradas, isto é, por qualquer um dos seus pontos passam duas retas distintas nelas contidas. Podem ser construídas com malhas com vigas retilíneas, o que simplifica a sua concretização. Em 1896 em Nizny Novgorod na Rússia ele construiu a primeira estrutura em forma de hiperboloide de uma folha: uma torre com 37metros de altura formada por uma malha de aço e sustentando um reservatório no topo. Também usou hiperboloides de uma folha na Torre Shabolovka, uma torre para transmissões radiofónicas com 160 metros de altura, construída em Moscovo entre 1920-1922.



9. Crescimento Populacional

O objetivo deste capítulo é analisar vários modelos do crescimento populacional e ver as suas aplicações.

O crescimento verifica se na natureza e também a nível populacional. Quando se fala em crescimento populacional muitas vezes pensa-se em populações humanas. O que é referido para o estudo das populações humanas, vale também para os estudos biológicos das relações entre organismos e seus ambientes ou para os estudos de populações de vírus e bactérias.

A análise do crescimento populacional destina-se a prever o que acontecerá a uma dada população ao longo do tempo. Se soubermos como se altera uma certa população em cada transição, podemos determinar como se altera a mesma, após muitas transições. O fluxo e o refluxo de uma população ao longo do tempo podem ser apresentados numa sequência de números, à qual chamamos sequência populacional. As suas características principais são:

- Toda a sequência populacional começa com a população inicial**:** P_0 (geração "zero").

- A sequência continua com P_1, P_2,... $P_{n.}$, onde P_n é o tamanho da população na n-ésima geração. Se o crescimento é negativo a população diminui e se o crescimento é positivo a população aumenta.

O crescimento de uma população é um processo dinâmico, ou seja, é uma situação que se vai alterando ao longo do tempo e na qual se podem diferenciar dois tipos de situação:

- Crescimento contínuo quando as mudanças ocorrem permanentemente, por exemplo, as contas bancárias cujos juros são compostos continuadamente. Esta questão é analisada em detalhe no capítulo da Matemática financeira.

- Crescimento discreto quando as mudanças efetuam-se periodicamente, as alterações não ocorrem sistematicamente, havendo intervalos de tempo em que a população se mantém constante. O período entre as transições tanto pode ser frações de segundos, minutos, horas, dezenas de anos ou séculos.

Daremos em seguida alguns exemplos do tipo de problemas de "crescimento populacional" que podem surgir e de alguns dos modelos mais simples que podem ser usados no estudo.

9.1 Modelo de crescimento linear

O crescimento linear pode ser modelado por uma progressão aritmética e é definido por uma expressão do tipo $y = a \times x + b$. Se $a > 0$, o modelo linear representa uma situação de crescimento, se $a < 0$ o modelo linear representa uma situação de decrescimento.

A atividade seguinte, adaptada de [9a], envolve a análise este modelo:

— Uma urbanização, com capacidade máxima de 3390 residentes; tinha, quando foi inaugurada, uma população de, aproximadamente, 500 pessoas. Supondo que em cada ano recebe 100 novos residentes, ao fim de quantos anos, mantendo-se o modelo, será atingida a capacidade máxima da urbanização?

Podemos representar a evolução nos primeiros 5anos por uma tabela:

Ano após a inauguração	População Residente
0	$U_0=500$
1	$U_1=500+100=600$
2	$U_2=600+100=700$
3	$U_3=700+100=800$
4	$U_4=800+100=900$
5	$U_5=900+100=1000$

A sequência pode ser definida por recorrência:

$U_0=500$

$U_n=U_{n-1}+100$

Então,

$U_1=U_0+100=500+100$

$U_2=U_1+100= (500+100) + 100 = 500+2\times100$

$U_3=U_2+100= (500+2\times100) + 100 = 500+3\times100$

……………………

$U_n = 500+100 \times n$

Esta expressão fornece o número de residentes em qualquer ano após a inauguração da urbanização, presumindo que se mantém o modelo de crescimento linear.

A urbanização atinge 3390 residentes quando U_n =3390, ou seja $500+100 \times n = 3390$, pelo que $n = 2890/100$.

Assim, entre o 28º e o 29ºanos a partir da data da inauguração, a capacidade da urbanização estará esgotada. (caso se mantenha o modelo de crescimento).

Para registar a evolução da taxa de crescimento ao longo dos primeiros 5 anos poderemos constatar a evolução da taxa de crescimento anual construindo uma tabela:

Anos após a inauguração	0	1	2	3	4	5
População residente	U_0=500	U_1=600	U_2=700	U_3=800	U_4=900	U_5=1000
Taxa de crescimento anual		$\frac{600-500}{500}$	$\frac{700-600}{500}$	$\frac{800-700}{500}$	$\frac{900-800}{500}$	$\frac{1000-900}{500}$
Taxa de crescimento anual		20%	17%	14%	13%	11%

Apesar do aumento bruto se manter (100 residentes por ano), a taxa de crescimento vai diminuir, uma vez que a total de referência (população do ano anterior) vai sendo cada vez maior.

9.2 Modelo de crescimento exponencial

"As pessoas que não estão acostumadas ao poder do crescimento exponencial surpreendem-se. [...]. Há formas claras de o ilustrar. Se dobrar um pedaço de papel uma vez, terá duas espessuras. Dobre-o novamente e terá quatro vezes a espessura inicial. Outra dobra e você terá um fardo de oito camadas de espessura. Mas suponha que a rigidez mecânica não seria um problema e que poderia ir dobrando sem parar, digamos cinquenta vezes. Qual espesso o fardo de papel seria então? A resposta é que seria tão espesso que ultrapassaria os limites da atmosfera terrestre e iria além da órbita de Marte."

Richard Dawkins (1996) – Uma Visão Exponencial

O crescimento exponencial pode ser modelado por uma progressão geométrica. Malthus apresentou o seguinte modelo para o crescimento exponencial de uma população P em função do tempo t: $P(t) = P \times e^{rt}$, onde P é a população para t = 0, r é a razão de crescimento/ decrescimento e t o tempo de crescimento ou decrescimento da população.

Se *a* for a espessura de uma folha de papel, ao fim de uma dobragem a espessura será 2a, ao fim de duas dobragens será 4*a*, ao fim de 3 dobragens a espessura será 8*a* e, ao fim de n dobragens, a espessura será $2^n \times a$. Assim, cada vez que se dobra o papel a espessura é multiplicada por 2.

A principal característica do modelo de crescimento exponencial é o facto de que em cada transição, a população se altera segundo uma proporção fixa. Esse modelo também é conhecido como modelo malthusiano contínuo, em referência a Malthus, que estudou esse tipo de crescimento populacional.

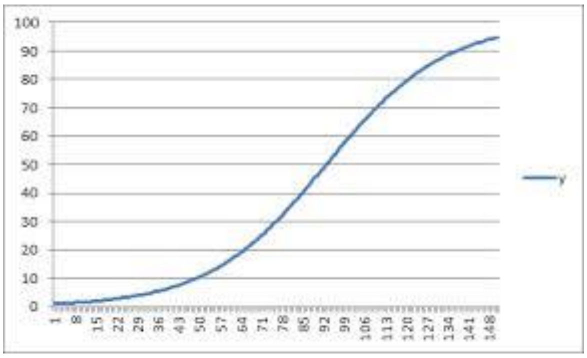
Exemplos deste tipo de crescimento associados a culturas de bactérias foram tratados na página 31 a propósito de aplicações da função exponencial.

9.3 Modelo de crescimento logístico

O modelo de crescimento logístico, de entre os muitos modelos matemáticos que se dedicam a problemas com uma taxa de crescimento variável num habitat fixo, é o mais simples. A ideia base deste modelo é o facto de a taxa de crescimento ser diretamente proporcional ao espaço disponível no habitat da população.

O modelo logístico ou de Verhulst é definido por uma expressão do tipo $P(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$, onde a, b, c são números reais e e o número de Neper.

Pierre François Verhulst foi matemático e doutor pela universidade de Gant. Em 1838 apresentou pela primeira vez a equação logística no seu trabalho “Notice sur la loi que la population suite dans son accroissement”. Para que a população não cresça exageradamente nem se extinga, a taxa de natalidade e/ou taxa de mortalidade devem poder variar em função de própria densidade populacional. Se a densidade subir acima de níveis sustentáveis pelo meio ambiente, deve ocorrer uma retroação negativa que incida sobre a taxa de natalidade, diminuindo-a, e/ou sobre a taxa de mortalidade, aumentando-a. Quando maior for a densidade populacional, maior é a interferência dos indivíduos uns com os outros. Inversamente, quando a população está em níveis abaixo de capacidade de sustentação do meio, a taxa de natalidade deve aumentar e/ou a taxa de mortalidade deve diminuir. O gráfico abaixo representa a função logística.



Apresentaremos de seguida, um exemplo envolvendo este modelo.

— Considerar o modelo de crescimento de uma população de animais, dado pela expressão:

$P(t) = \dfrac{120}{1+5e^{-0,5t}}$, $t \geq 0$, com t - tempo em anos.

a) Qual é o número de animais existentes no instante inicial.

b) Justificar que se trata de um modelo logístico e descrever a evolução desta população ao longo do tempo.

a) $P(0) = \dfrac{120}{1+5e^{-0,5\times 0}} = \dfrac{120}{6} = 20$. No início existia 20 animais.

b) É um modelo logístico porque o seu gráfico apresenta um crescimento rápido nos primeiros tempos e a partir de determinada altura, estabiliza. A população tende a estabilizar, porque as espécies se adaptarem às condições externas encontrarão as condições para se desenvolverem mais rapidamente. Pouco a pouco a população terá tendência a atingir um estado de equilíbrio, conhecido por capacidade máxima do sistema.

9.4 Modelo de crescimento logarítmico

O modelo de crescimento logarítmico é definido por uma expressão do tipo

$y = a + b \times \ln x$, onde a e b são números reais.

Este modelo aplica-se no estabelecimento de padrões de desenvolvimento infantil:

A altura A (p) (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser definida, em função do seu peso p (em quilogramas), pela seguinte expressão: $A(p) = -0,52 + 0,55 \times \ln p$.

No âmbito do ensino secundário esta expressão pode ser usada para trabalhar a noção de logaritmo:

— Supondo que altura A em metros de uma criança do sexo masculino é expressa em função do seu peso p em quilogramas por $A(p) = -0,52 + 0,55 \times \ln p$, qual deveria ser o seu peso sabendo que tem 1,2 m de altura.

Tem-se $A(p) = 1,2$; $A(p) = -0,52 + 0,55 \ln(p) = 1,2$ pelo que $0,55 \ln(p) = 1,2 + 0,52$.

Então, $\ln(p) = \frac{1,72}{0,55}$ e $p = e^{1,72/0,55} \approx 22,8$ kg

O peso da criança deveria rondar os 22,8 kg.

— Admita que a altura h, em metros, das plantas de uma dada espécie é dada em função do tempo t $(t \geq 1)$, em meses, por: $h(t) = 0,32 + 0,89 \times \ln t$. Mostra que para qualquer valor de t, $h(3t) - h(t)$ é constante. Determinar um valor aproximado às centésimas dessa constante e interprete esse valor no contexto do problema.

$$h(3t) - h(t) = 0{,}32 + 0{,}89\times \ln(3t) - 0{,}32 - 0{,}89\times \ln(t) = 0{,}89 \times (\ln(3t) - \ln t) =$$
$$0{,}89\times \ln \frac{3t}{t} = 0{,}89\times \ln 3 \approx 0{,}98$$

A diferença de alturas de duas plantas, em que uma tem o triplo da idade da outra, é cerca de 98cm.

Fazendo uma síntese das características dos quatro modelos apresentados concluímos que:

No modelo de **crescimento linear**:

- A sequência da população é descrita por uma progressão aritmética;

- A população cresce pela adição de uma constante, c, em cada período de transição;

- É usual encontrar-se este modelo de crescimento em populações de objetos inanimados.

No modelo de **crescimento exponencial**:

- A sequência da população é descrita por uma progressão geométrica;

- A população cresce pela multiplicação de uma constante, r (razão da progressão geométrica), em cada período de transição.

- É usual encontrar-se este modelo de crescimento em populações de crescimento ilimitado.

No modelo de **crescimento logístico**:

- A sequência populacional varia de uma época para a outra, dependendo do espaço disponível no habitat da população;

- É usual encontrar-se este modelo de crescimento, ou variações deste em diversas populações animais.

No modelo de **crescimento logarítmico**:

- nunca está definido para x=0;

- caracteriza-se por ter uma variação mais acentuada na fase inicial, tornando-se mais lenta com o passar do tempo, mas mesmo assim ultrapassando qualquer valor limite que se queria considerar.

As aplicações destes modelos matemáticos, com o desenvolvimento das tecnologias de informação, abrem-se para os mais diversos campos do conhecimento e dos interesses tecnológicos e económicos, desde aplicações em medicina, em bio-matemática, em economia e finanças, em meteorologia, no meio ambiente e nos mais diferentes aspetos da vida.

10. Probabilidades no dia-a-dia

Todos os dias somos confrontados com situações, que nos conduzem a utilizar, intuitivamente, a noção de probabilidade:

Por exemplo,

- Dizemos que existe uma pequena probabilidade de ganhar o totoloto;
- Dizemos que existe uma grande probabilidade de não chover num dia de verão.

Utilizamos a noção de probabilidade no dia-a-dia, nas mais variadas situações, para exprimir uma medida da "credibilidade" ou "grau de convicção" na observação do acontecimento na próxima realização da experiência aleatória.

Os jogos de sorte e azar são a aplicação mais natural das probabilidades, mas existem vários domínios que as utilizam. Por exemplo, a matemática financeira usa a teoria das probabilidades para o estudo dos preços do mercado de ações e produtos derivados. Também os estudos probabilísticos de segurança constituem uma ferramenta para avaliar os riscos em instalações industriais.

A propósito do papel das probabilidades no ensino, Martin Gardner escreve:

"A teoria das probabilidades tornou-se tão essencial em todos os ramos da ciência, não só nas ciências físicas, mas também nas ciências biológicas e sociais, que se pode prever com alguma segurança que desempenhará um papel cada vez mais importante no ensino da matemática nos primeiros anos de escolaridade."

A questão seguinte proporciona a associação da teoria das probabilidades à genética de uma forma elementar.

— Qual a probabilidade de um casal, ambos com olhos castanhos, ter um filho com olhos azuis?

Comecemos por analisar como se processa a hereditariedade da cor dos olhos com um exemplo adaptado de [10a].

Cada característica (neste caso, a cor dos olhos) é determinada por um ou vários genes. Cada um de nós recebeu duas cópias do gene: uma do pai e outra da mãe. A interação destes genes determina a forma da característica. Quando duas cópias do gene são iguais a forma da característica é, olhos castanhos, se duas cópias têm versão castanha, e olhos azuis, se duas copiais têm versão azul. Quando duas cópias do gene são diferentes eles interagem e normalmente só um deles se manifesta.

Designemos por **C** o gene que determina cor dos olhos castanha, e por **a** o gene que determina cor dos olhos azuis. O gene **C** é dominante e o gene **a** é recessivo. A interação de dois genes diferentes determina o dominante a manifestar-se.

Genótipo é a combinação de genes para uma determinada característica e fenótipo é a forma como a característica, que é determinada pelos genes, se manifesta.
Exemplo: Ao genótipo **CC** corresponde o fenótipo "olhos castanhos".

Analisemos o seguinte caso:

O pai do António tem olhos castanhos e a mãe tem olhos azuis. O pai da Clara tem olhos azuis e a mãe tem olhos castanhos. Tanto o António como a Clara têm olhos castanhos, mas têm quatro filhos (João, Teresa, Carolina e Inês), um dos quais tem olhos azuis (Inês).

Por que razão os olhos azuis só apareceram na segunda geração?

Se o pai do António e a mãe da Clara tiverem apenas genes **C**, como na interação de dois genes diferentes se manifesta o dominante, sendo o gene **C** dominante e o gene **a** recessivo, ao genótipo **Ca** corresponde o fenótipo "olhos castanhos". Assim, as combinações possíveis dos genes dos pais do António e dos pais da Clara conduzem sempre ao genótipo **Ca**.

	Genótipo	Fenótipo
Pai do António	**CC**	Olhos castanhos
Mãe do António	**aa**	Olhos azuis
António	**Ca**	Olhos castanhos
Pai da Clara	**aa**	Olhos azuis
Mãe da Clara	**CC**	Olhos castanhos
Clara	**Ca**	Olhos castanhos

Tanto a Clara como o António herdaram um gene **C** e um gene **a**, pelo que podem ter filhos com olhos azuis correspondentes ao genótipo **aa**.

Nos filhos do António e da Clara os genes distribuíram-se da seguinte forma:

	Genótipo	Fenótipo
António	Ca	Olhos castanhos
Clara	Ca	Olhos castanhos
João	CC	Olhos castanhos
Tereza	Ca	Olhos castanhos
Carolina	Ca	Olhos castanhos
Inês	aa	Olhos azuis

Qual a probabilidade de cada genótipo?

Genótipo **CC**: $p = \frac{1}{4}$

Genótipo **Ca**: $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Genótipo **aa**: $p = \frac{1}{4}$

Assim, a probabilidade do fenótipo "olhos castanhos" ocorrer é de 75%, enquanto a probabilidade do fenótipo "olhos azuis" ocorrer é de 25%.

Retomemos o problema inicial: Qual a probabilidade de um casal, ambos com olhos castanhos, ter um filho com olhos azuis?

Se os pais têm olhos castanhos, então têm o gene **C** e existem dois genótipos possíveis, **CC** ou **Ca**, e existem três cruzamentos possíveis, **CC** x **CC, CC** x **Ca e Ca** x **Ca.**

Assim,

Casal	**CC** x **CC**	**CC** x **Ca**	**Ca** x **Ca**
Genótipos da prole	100% **CC**	50% **CC** e 50% **Ca**	75% **CC** ou **Ca**, e 25% **aa**
Fenótipos da prole	100% olhos castanhos	100% olhos castanhos	75% olhos castanhos e 25% olhos azuis

sendo muito mais provável que os pais de olhos castanhos tenham filhos de olhos castanhos.

A atividade seguinte, adaptada de [10c], envolve a análise de um modelo de probabilidade e pode ser realizada no âmbito do ensino básico, contribuindo para o desenvolvimento da noção de probabilidade.

— Para prever stocks de sangue adequados à população portuguesa Portugal conhece a forma como se distribuem em média os correspondentes tipos sanguíneos. Essa distribuição faz-se de acordo com o seguinte modelo de probabilidade:

Tipo sanguíneo	O	A	B	AB
Probabilidade	42%	47%	8%	3%

1. Selecionando ao acaso um indivíduo na população portuguesa, a que grupo sanguíneo é mais provável ele pertencer? E menos provável?

2. O Ricardo tem sangue de tipo O. Se precisar de sangue, qual a probabilidade de escolhendo um indivíduo ao acaso de entre a população portuguesa, ele possa dar sangue ao Ricardo?

3. A Rita tem sangue de tipo AB. Se precisar de sangue, qual a probabilidade de escolhendo um indivíduo ao acaso de entre a população portuguesa, ele possa dar sangue à Rita.

4. A Joana tem sangue de tipo A. Se precisar de sangue, qual a probabilidade de escolhendo um indivíduo ao acaso de entre a população portuguesa, ele possa dar sangue à Joana.

Relativamente a 1, decorre imediatamente do modelo que mais provável um indivíduo na população portuguesa, selecionando ao acaso, pertence ao grupo sanguíneo A e menos provável ao grupo sanguíneo AB.

No que respeita ao item 2, o Ricardo só pode receber sangue de tipo O, pelo que a probabilidade de alguém lhe poder dar sangue, se for selecionado ao acaso, é de 0,42 ou 42%.

No item 3, como qualquer pessoa pode dar sangue à pessoa que pertence ao grupo sanguíneo AB, se Rita precisar de sangue, a probabilidade é igual a 1 ou 100%.

Na questão 4, sabemos quem tem o grupo sanguíneo B, pode receber sangue tipo O ou tipo A. Assim, a probabilidade que uma pessoa selecionada ao acaso possa dar sangue à Joana é 0,89 (0,42+0,47=0,89) ou 89%.

Continuando aplicações sobre o tipo sanguíneo e o fator Rhésus analisamos outra atividade sobre os acontecimentos independentes fixada no livro Problemas de Matemática A do 12ºano do António Pampulim e outros da editora Editorial Presença.

— Além do sangue humano está classificado em quatro grupos distintos A, B, AB, O, o sangue pode possuir ou não o fator Rhésus. Se o sangue possui este fator, diz-se Rhésus positivo (Rh+), se não possui, diz-se Rhésus negativo (Rh-). Numa certa população, os grupos sanguíneos e os respetivos Rhésus estão repartidos da seguinte forma:

	A	B	AB	O
Rh+	36%	9%	9%	36%
Rh-	4%	1%	1%	4%

Averiguar se, nesta população, o grupo sanguíneo é independente do fator Rhésus.

Então, neste problema temos averiguar se são independentes todos os pares de acontecimentos seguintes A e Rh+, A e Rh-, B e Rh+, B e Rh-, ets.

Sabemos, que os dois acontecimentos I e J são independentes se,
$P(I \cap J) = P(I) \times P(J)$.

Seguindo a tabela apresentada: P(A)=0,4, P(B)=0,1, P(AB)=0,1, P(O)=0,4, P(Rh+)=0,9, P(Rh-)=0,1.
Então verificamos:
$P(A \cap Rh+) = P(A) \times P(Rh+) \Leftrightarrow 0{,}36=0{,}4\times 0{,}9$
$P(A \cap Rh-) = P(A) \times P(Rh-) \Leftrightarrow 0{,}04=0{,}4\times 0{,}1$
$P(B \cap Rh+) = P(B) \times P(Rh+) \Leftrightarrow 0{,}09=0{,}1\times 0{,}9$
$P(B \cap Rh-) = P(A) \times P(Rh-) \Leftrightarrow 0{,}01=0{,}1\times 0{,}1$
$P(AB \cap Rh+) = P(AB) \times P(Rh+) \Leftrightarrow 0{,}09=0{,}1\times 0{,}9$
$P(AB \cap Rh-) = P(AB) \times P(Rh-) \Leftrightarrow 0{,}01=0{,}1\times 0{,}1$
$P(O \cap Rh+) = P(O) \times P(Rh+) \Leftrightarrow 0{,}36=0{,}4\times 0{,}9$
$P(O \cap Rh-) = P(O) \times P(Rh-) \Leftrightarrow 0{,}04=0{,}4\times 0{,}1$

Concluímos, que nesta população, o grupo sanguíneo é independente do fator Rhésus.

O exemplo seguinte, que está incluído no manual da Matemática A do 12ºano da Luisa Gomes e Daniela Raposo, editora ASA no capítulo dos Probabilidades, é uma aplicação de distribuição binomial e pode ser trabalhado com os alunos do ensino secundário. A associação de um prémio a um sorteio de certidões pode dar a este exemplo um contexto de realidade.

— Sabendo-se que 51% dos nascimentos de certa população são do sexo masculino, se sortearmos 5 certidões do arquivo de nascimentos desta população, qual a probabilidade estimada de que 3 registos sejam do sexo masculino?

Neste exemplo temos um número fixo n=5 de experiências, as tentativas são independentes umas das outras, cada tentativa pode obter sucesso ou insucesso (o sucesso é ser do sexo masculino e o insucesso é ser do sexo feminino) e a probabilidade de sucesso é constante de prova para prova, então podemos afirmar que temos uma experiência de n tentativas de Bernoulli.

Seja o nascimento do sexo masculino é igual p, o nascimento do sexo feminino – q = 1- p .

A sequência que nos interessa: h, h, h, m, m. A frequência é $p^3 \times q^2$. Como a ordem não interessa, temos que pensar em todas as combinações possíveis. Há 10 modos de sorteamos 3 registos masculinos em 5, ${}^5C_3=10$:

h h h m m - h h m m h - h h m h m - h m m h h - h m h m h
h m h h m - m m h h h - m h m h h - m h h h m - m h h m h

Como cada uma das sequências tem a mesma probabilidade de ocorrência $p^3 \times q^2$, a probabilidade estimada de obtermos a sequência 1 ou 2 ou 3 ou... 10 é $10 \times p^3 \times q^2$.

Lembrando que, p = 0,51, então q = 1 - p = 0,49.

Portanto, numa experiencia de n=5 tentativas repetidas de Bernoulli, em que p = 0,51 é a probabilidade de sucesso em cada prova com a variável aleatória X: "número de sucessos nas n tentativas", utilizamos a distribuição binomial de parâmetros n e p: B (n, p), onde k é o número de sucessos.

$p\ (X = k) = {}^nC_k \times p^k \times (1-p)^{n-k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p\ (X = 3) = 10 \times p^3 \times q^2 = 10 \times 0{,}51^3 \times 0{,}49^2 = 10 \times 0{,}132651 \times 0{,}2401 = 0{,}3185 =$ 31,85%.

Então a probabilidade de que os 3 registos dos 5 sejam do sexo masculino é 31,85%.

Conclusão

No ano em que se comemora o centenário do nascimento de José Sebastião e Silva, matemático e pedagogo de renome internacional, recordemos as suas palavras:

"A matemática não se reduz a ciência isolada platonicamente de tudo o resto. È também um instrumento ao serviço do homem nos mais variados ramos da ciência e da técnica. O professor deve sempre ter presente este fato e tentar estabelecer, sempre que possível, as conexões da matemática com outros domínios do pensamento, atendendo a que muitas dos seus alunos irão ser físicos, biólogos, engenheiros, economistas, agrónomos ou médicos."

Guia para Utilização de Compendio de Matemática, 1ºvolume

Espero que este trabalho, apesar das suas limitações e fragilidades, possa contribuir para o estabelecimento destas conexões no contexto do ensino básico e do ensino secundário.

Bibliografia

- [2] http://ensinodematemtica.blogspot.pt/2010/02/escala-13022010.html

- [3a] http://www.matematica-interactiva.com/matematica/index.php?ref=104
- [3b] Da Modelação Matemática à Simulação Computacional, S. Nápoles, M. Oliveira, Gazeta de Matemática nº 0166, Ano LXXIII, Mar. 2012
- [3c] Da Modelação Matemática à Simulação Computacional, S. Nápoles, M. Oliveira, Gazeta de Matemática nº 0166, Ano LXXIII, Mar. 2012
- [3d] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm12/problema.htm
- [3e] http://matdurlia2010.blogspot.pt/2010/08/qual-o-uso-da-funcao-afim-no-dia-dia.html
- [3f] http://giovanniesperate1g.blogspot.pt/
- [3g] http://construindocomatrigonometria.blogspot.pt/2010/12/exemplos-praticos-da-aplicacao-das.html
- [3i] http://www.trabalhosfeitos.com/ensaios/Aplica%C3%A7%C3%A3o-Da-Fun%C3%A7%C3%A3o-Exponencial-No-Cotidiano/94855.html
- [3k] http://www.brasilescola.com/matematica/aplicacoes-uma-funcao-exponencial.htm

- [4a] http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_icap3.pdf
- [4b] H. E. Huntley, THE DIVINE PROPORTION, a study in Mathematical beauty, Dover Publications, INC, New York
- [4c] Nuno Crato "A MATEMÁTICA DAS COISAS", SPM, Gravida
- [4d] http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2005/crescimento.pdf

- [5a] http://turmaxis.no.sapo.pt/PL_PBarbosa+LGomes.pdf
- [5b] http://turmaxis.no.sapo.pt/PL_Sandra+AnaTeresa.pdf
- [5c] http://www.agais.com/manuscript/ms0106_programacao_linear.pdf

- [7a] http://www.brasilescola.com/matematica/matematica-na-economia-funcao-custo-funcao-receita-.htm
- [7b] James Stewart Cálculo - Volume I

- [8] N.Vilenkine, G.Chilov, V.Ouspenski, J.Lioubitch, L.Chor, QUELQUES APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES, Editions Mir, Moscou
- [8a] http://www.prof2000.pt/users/miguel/tese/capitulo2.htm
- [8b] http://answers.yahoo.com/question/index?qid=20061113081057AAGzNHc
- [8c] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm26/conicas.htm
- [8d] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm26/propriedadesreflectoras.htm

- [8e]http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10396/geo0501.htm
- [8f] http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo0504.htm
- [8i] http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo0505.htm
- [8k] http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/FT-6.htm
- [8l] http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/FT-4.htm
- [8m] http://www.telescopiosastronomicos.com.br/refletores.html

- [8n] Sebastião e Silva, J., Geometria Analítica Plana, Empresa Literária Fluminense, 1967
- [8o] http://cmaf.ptmat.fc.ul.pt/~formas-formulas/pt/
- [8p] http://fatosmatematicos.blogspot.pt/2011/12/superficies-quadricas-o-hiperboloide-de.html
- [8r] http://issuu.com/formas-formulas/docs/cat__logo_exposi____o
- [8s]http://fatosmatematicos.blogspot.pt/2011/12/superficies-quadricas-o-hiperboloide-de.html [9e]

- [9a] MACS 11, Ensino secundário, Cristina Cruchinho e Manuela Simões, Areal editores
- [9b]http://ecologia.icb.ufmg.br/~joseneto/jose/Modelos%20de%20crescimento%20populacional%20-%20exemplos.pdf
- [9c] http://www.slideshare.net/popecologia/exponential-7874863

- [10a] http://www.slideshare.net/isabelourenco/hereditariedade-da-cor-dos-olhos
- [10b] Graça Martins, M. E., Ponte, J.P., Organização e Tratamento de dados, Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC), Junho de 2011.
- [10c] http://mat.absolutamente.net/recursos/docs_curr/3ciclo/otd.pdf
- [10d] Problemas de Matemática A do 12ºano, António Pampulim e outros, Editorial Presença.
- [10e] Matemática A do 12ºano, Luisa Gomes e Daniela Raposo, editora ASA
- [10f] http://geramat.blogs.sapo.pt/12145.html
- [10i] http://www.cultura.ufpa.br/dicas/biome/bioexe2.htm